L2 Physique : Addition des vitesses et la causalité -TD3

Année 2025-2026

1 Addition de vitesse

Une étudiante, en retard pour son cours de trompette, enfourche son vélo et pédale très rapidement, à une vitesse de 0,5c, c'est-à-dire la moitié de la vitesse de la lumière ! (Wow !)

En chemin, à l'instant précis $t = 0$, elle dépasse son frère, qui court sur le trottoir dans la même direction qu'elle (le long de l'axe des x). Elle constate que la vitesse de son frère par rapport à elle est de 0,25c et dirigée en sens opposé.

(a) Quelle est la vitesse du frère dans le référentiel de l'étudiante ? (On précisera le signe de cette vitesse.)

(a) solution : C'est $-c/4$. Elle se dépasse son frère, donc la vitesse du frère est dans le sens négative. Nous avons choisit que la vitesse de l'étudiante est positive, disons le long de l'axe des x.

(b) Soient $(x_E(t), t)$ et $(x_F(t), t)$ les coordonnées de l'étudiante et de son frère respectivement dans un référentiel R immobile par rapport à la terre. Donc,

$$x_E = v_E\, t, \qquad\qquad x_F = v_F\, t. \tag{1}$$

Utiliser la transformation de Lorentz pour trouver les coordonnées par rapport à un référentiel R' qui se déplace avec l'étudiante. Verifier que $x'_E = 0$. Trouver une expression pour

$$\frac{\Delta x'_F}{\Delta t'} = v'_F$$

Trouver une formule pour v'_F. Il s'agit d'une vitesse du frère par rapport à sa soeur, v_{EF}. Indice : Pour trouver $\Delta x'_F$ et $\Delta t'$ différenciez l'expression de x'_F et t'. Si vous ne savez pas comme le faire, utilisez l'expression de x'_F et t' à deux instants de temps, disons t_1 et t_2 et soustrayez :

$$\Delta x'_F = x'_F(t_2) - x'_F(t_1) \qquad\qquad \Delta t' = t'(t_2) - t'(t_1)$$

Vous devriez trouver

$$\mathrm{d}x'_F/\mathrm{d}t' = v_{\mathrm{EF}} = \frac{(v_{\mathrm{TF}} - v_{\mathrm{TE}})}{(1 - v_{\mathrm{TE}} v_{\mathrm{TF}}/c^2)}. \tag{2}$$

(b) solution : La transformation de Lorentz du referentiel de la terre au referentiel d'étudiante :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$

où $\beta = v_{\mathrm{TE}}/c$.

Pour l'étudiante, $x_E = v_{\mathrm{TE}} t$, donc

$$x'_E = \gamma x_E - \gamma\beta ct = \gamma(x_E - v_{\mathrm{TE}} t) = 0,$$

bien sûr !

Pour le frère, $x_F = v_{\mathrm{TF}} t$, donc

$$x'_F = \gamma x_F - \gamma\beta ct = \gamma(x_F - v_{\mathrm{TE}} t) \tag{4}$$
$$ct' = \gamma ct - \gamma\beta x_F, \qquad \Longrightarrow \qquad \text{donc } t' = \gamma(t - (v_{\mathrm{TE}}/c^2)x_F) \tag{5}$$

Nous cherchons une relation pour v'_{F}, la vitesse du frère dans le référentiel de l'étudiante. Différenciez les deux équations (4) et (5) :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x'_F &= \gamma(\mathrm{d}x_F - v_{\mathrm{TE}}\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}t' &= \gamma(\mathrm{d}t - (v_{\mathrm{TE}}/c^2)\mathrm{d}x_F) \end{aligned} \tag{6}$$

Divisez la première équation par dt, remarquez les vitesse de frère :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x'_F/\mathrm{d}t &= \gamma(\mathrm{d}x_F/\mathrm{d}t - v_{\mathrm{TE}}) = \gamma(v_{\mathrm{TF}} - v_{\mathrm{TE}}) \\ \mathrm{d}t'/\mathrm{d}t &= \gamma(1 - (v_{\mathrm{TE}}/c^2)\mathrm{d}x_F/\mathrm{d}t) = \gamma(1 - v_{\mathrm{TE}}v_{\mathrm{TF}}/c^2) \end{aligned} \tag{7}$$

Diviser les deux, les dt s'annulent et on obtient pour la vitesse du frère dans R' (c'est-à-dire la vitesse du frère par rapport à l'étudiante), alors $v_{\mathrm{EF}} = v'_{\mathrm{F}}$) :

$$\mathrm{d}x'_F/\mathrm{d}t' = v_{\mathrm{EF}} = \frac{(v_{\mathrm{TF}} - v_{\mathrm{TE}})}{(1 - v_{\mathrm{TE}}v_{\mathrm{TF}}/c^2)}. \tag{8}$$

(c) A partir de cette équation, dans laquelle nous savons $v_{\mathrm{TE}} = c/2$ and $-v_{\mathrm{EF}} = v_{\mathrm{FE}} = c/4$, trouver une formule pour la vitesse du frère par rapport à la terre, v_{TF}, et trouver la valeur numérique.

(c) solution : L'algebra donne :

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{EF}}(1 - v_{\mathrm{TE}}v_{\mathrm{TF}}/c^2) &= v_{\mathrm{TF}} - v_{\mathrm{TE}}, \\ v_{\mathrm{EF}} - v_{\mathrm{EF}}v_{\mathrm{TE}}v_{\mathrm{TF}}/c^2 &= v_{\mathrm{TF}} - v_{\mathrm{TE}}, \\ -v_{\mathrm{TF}} - v_{\mathrm{EF}}v_{\mathrm{TE}}v_{\mathrm{TF}}/c^2 &= -v_{\mathrm{TE}} - v_{\mathrm{EF}}, \\ v_{\mathrm{TF}}\left(1 + v_{\mathrm{EF}}v_{\mathrm{TE}}/c^2\right) &= v_{\mathrm{TE}} + v_{\mathrm{EF}}, \\ v_{\mathrm{TF}} &= \frac{v_{\mathrm{TE}} + v_{\mathrm{EF}}}{(1 + v_{\mathrm{TE}}v_{\mathrm{EF}}/c^2)}, \end{aligned} \tag{9}$$

et remarquez que c'est l'équation familière de l'addition de vitesses.

Si on remplace les vitesses maintenant connues sur le membre droite, attention $v_{\mathrm{EF}} = -c/4$, on obtient la vitesse :

$$v_{\mathrm{TF}} = \frac{(c/2 - c/4)}{(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{4})} = \frac{\frac{1}{4}c}{\frac{7}{8}} = \frac{2}{7}c. \tag{10}$$

Finalement, il est intéressant de remarquer que l'équation Eq. (8) est une version de la loi d'addition des vitesses que l'on a trouvé dans le CM 3 si l'on remplace $v_{\mathrm{TE}} = -v_{\mathrm{ET}}$. Puis on trouve

$$v_{\mathrm{EF}} = \frac{(v_{\mathrm{ET}} + v_{\mathrm{TF}})}{(1 + v_{\mathrm{ET}}v_{\mathrm{TF}}/c^2)}. \tag{11}$$

(d) La loi d'Einstein pour l'addition des vitesses généralise l'addition des vitesses en physique galiléenne. Soit v_{12} la vitesse de la particule 2 par rapport à la particule 1, et la vitesse v_{23} de la particule 3 par rapport à la particule 2, alors la vitesse de particule 3 par rapport à la particule 1 sera :

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + \frac{v_{12}v_{23}}{c^2}}. \tag{12}$$

Ici, nous supposons que toutes les vitesses sont dans la même direction (mais peut-être du sens différent), disons le long de l'axe des x.

Utiliser cette formule (12) pour l'addition de vitesse rélativiste pour trouver la vitesse du frère par rapport à la terre. Indice : Faites attention au signe de la vitesse. En outre, remarquer que le principe de réciprocité implique que $v_{12} = -v_{21}$.

(c) solution : Soit v_{12} la vitesse de la particule 2 par rapport à la particule 1, et la vitesse v_{23} d'une troisième particule par rapport de la deuxième particule, tous dans la même direction (mais peut-être du sens différent), disons le long de l'axe des x. Alors, la loi d'Einstein pour l'addition des vitesses est :

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + \frac{v_{12}v_{23}}{c^2}}. \tag{13}$$

Donc, suivant cette convention on appele $v_{\mathrm{TE}} = c/2$ la vitesse de l'étudiante par rapport à la Terre, $v_{\mathrm{EF}} = -c/4$ pour la vitesse du frère par rapport à celle de l'étudiante. Nous voulons v_{TF} qui est donnée par l'équation (13) :

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{TF}} &= \frac{v_{\mathrm{TE}} + v_{\mathrm{EF}}}{1 + \frac{v_{\mathrm{TE}}v_{\mathrm{EF}}}{c^2}}, \\ &= \frac{\frac{c}{2} - \frac{c}{4}}{1 + \frac{\frac{c}{2}(\frac{-c}{4})}{c^2}}, \\ &= \frac{\frac{c}{4}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}} = \frac{\frac{c}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{2}{7}c. \end{aligned} \tag{14}$$

2 Le problème de causalité

Si aucun signal ne peut voyager plus vite que la lumière, alors l'intervalle de temps qui sépare deux événements A et B dont l'un est la cause de l'autre doit être supérieur au temps mis par la lumière pour aller de A en B. On a donc :

$$|t_B - t_A| > |x_B - x_A|/c \qquad \text{ou} \quad (t_B - t_A)^2 > (x_B - x_A)^2/c^2 \tag{15}$$

si on choisit les deux événements comme se produisant sur l'axe des x.

(a) Montrer que si l'inégalité (15) ci-dessus est vraie dans un référentiel elle est vraie dans tout référentiel en mouvement uniforme par rapport à lui. L'intervalle entre des événements est dit « de genre temps ».

Indice : Utiliser l'invariante par une transformation de Lorentz, Δs^2, qui s'appele l'intervalle (au carré) entre les événements A et B dans le référentiel R

$$\Delta s^2 := c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \tag{16}$$

où $\Delta x = x_B - x_A$ et $\Delta t = t_B - t_A$.

(a) solution : L'intervalle (au carré) entre les événements A et B dans le référentiel R est

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta s^2 \tag{17}$$

où $\Delta x = x_B - x_A$ et $\Delta t = t_B - t_A$. Cet intervalle Δs^2 est invariant par une transformation de Lorentz. Ça veut dire que l'on peut écrire immédiatement

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta s^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 \tag{18}$$

où $\Delta x' = x'_B - x'_A$ et $\Delta t' = t'_B - t'_A$ sont les intervalles des coordonnées dans un autre référentiel R' en mouvement uniforme par rapport à R. Mais l'inégalité (15) implique que le membre gauche est positif. Donc on a immédiatement que le membre droite est positif. Et ce dernier implique que l'inégalité est valable dans tout référentiel en mouvement uniforme par rapport à R !

(b) Montrer que si l'équation (15) ci-dessus est vraie, il existe au moins un référentiel R' où l'intervalle $t'_B - t'_A$ est propre (c'est-a-dire $x'_B = x'_A$), et il n'y a pas de référentiel où les événements soient simultanés.

(b) solution : Disons que le référentiel inertiel utilisé est R. Nous voulons savoir si il y a un autre référentiel inertiel, disons R', pour lequel $\Delta x' = 0$. La transformation de Lorentz relie les coordonnées :

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} \tag{19}$$

Alors, nous voulons trouver le référentiel (c'est à dire le β), si il existe, tel que

$$\begin{aligned} &\Delta x' = -\beta\gamma c\Delta t + \Delta x \gamma = 0. \\ &\frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{\beta\gamma}{\gamma} = \beta && \text{réarrangé} \end{aligned} \tag{20}$$

Nous savons $|\Delta x / c\Delta t| < 1$ qui implique que $|\beta| < 1$. C'est bien possible car $\beta = v/c$ où v est la vitesse du référentiel R' par rapport au référentiel R. Q.E.D. (quod erat demonstrandum)

Par contra, on peut montrer qu'il n'y a pas de référentiel pour lequel $\Delta t' = 0$. La transformation de Lorentz donne

$$\begin{aligned} &c\Delta t' = -\beta\gamma \Delta x + c\Delta t \gamma = 0. && \text{nous essayons d'avoir cette égalité} \\ &\frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\gamma} = \frac{1}{\beta} && \text{réarrangé} \end{aligned} \tag{21}$$

Nous savons $|\Delta x / c\Delta t| < 1$ ce qui implique ici que $|\beta| > 1$. Ce n'est pas possible car $|v| < c$! Q.E.D.

(c) Si, au contraire

$$|t_B - t_A| < |x_B - x_A|/c \qquad \text{ou} \quad (t_B - t_A)^2 < (x_B - x_A)^2/c^2 \tag{22}$$

montrer qu'il existe un référentiel où les événements soient simultanés, mais aucun où l'intervalle de temps soit propre. L'intervalle entre des événements est dit « de genre espace ».

(c) solution : Similaire de celle dans (b) ci-dessus.