

L2 Physique : Addition des vitesses et la causalité -TD3

Année 2024-2025

1 Addition de vitesse

Une étudiante, en retard pour son cours de trompette, enfourche son vélo et pédale très rapidement, à une vitesse de $0,5c$, c'est-à-dire la moitié de la vitesse de la lumière! (Wow!)

En chemin, à l'instant précis $t = 0$, elle dépasse son frère, qui court sur le trottoir dans la même direction qu'elle (le long de l'axe des x). Elle constate que la vitesse de son frère par rapport à elle est de $0,25c$ et dirigée en sens opposé.

(a) Quelle est la vitesse du frère dans le référentiel de l'étudiante? (On précisera le signe de cette vitesse.)

(b) Soient $(x_E(t), t)$ et $(x_F(t), t)$ les coordonnées de l'étudiante et de son frère respectivement dans un référentiel R immobile par rapport à la terre. Donc,

$$x_E = v_E t, \quad x_F = v_F t. \quad (1)$$

Utiliser la transformation de Lorentz pour trouver les coordonnées par rapport à un référentiel R' qui se déplace avec l'étudiante. Vérifier que $x'_E = 0$. Trouver une expression pour

$$\frac{\Delta x'_F}{\Delta t'} = v'_F$$

Trouver une formule pour v'_F . Il s'agit d'une vitesse du frère par rapport à sa soeur, v_{EF} . Indice : Pour trouver $\Delta x'_F$ et $\Delta t'$ différenciez l'expression de x'_F et t' . Si vous ne savez pas comme le faire, utilisez l'expression de x'_F et t' à deux instants de temps, disons t_1 et t_2 et soustrayez :

$$\Delta x'_F = x'_F(t_2) - x'_F(t_1) \quad \Delta t' = t'(t_2) - t'(t_1)$$

Vous devriez trouver

$$dx'_F/dt' = v_{EF} = \frac{(v_{TF} - v_{TE})}{(1 - v_{TE}v_{TF}/c^2)}. \quad (2)$$

(c) A partir de cette équation, dans laquelle nous savons $v_{TE} = c/2$ and $-v_{EF} = v_{FE} = c/4$, trouver une formule pour la vitesse du frère par rapport à la terre, v_{TF} , et trouver la valeur numérique.

(d) La loi d'Einstein pour l'addition des vitesses généralise l'addition des vitesses en physique galiléenne. Soit v_{12} la vitesse de la particule 2 par rapport à la particule 1, et la vitesse v_{23} de la particule 3 par rapport à la particule 2, alors la vitesse de particule 3 par rapport à la particule 1 sera :

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + \frac{v_{12}v_{23}}{c^2}}. \quad (3)$$

Ici, nous supposons que toutes les vitesses sont dans la même direction (mais peut-être du sens différent), disons le long de l'axe des x .

Utiliser cette formule (3) pour l'addition de vitesse relativiste pour trouver la vitesse du frère par rapport à la terre. Indice : Faites attention au signe de la vitesse. En outre, remarquer que le principe de réciprocité implique que $v_{12} = -v_{21}$.

2 Le problème de causalité

Si aucun signal ne peut voyager plus vite que la lumière, alors l'intervalle de temps qui sépare deux événements A et B dont l'un est la cause de l'autre doit être supérieur au temps mis par la lumière pour aller de A en B . On a donc :

$$|t_B - t_A| > |x_B - x_A|/c \quad \text{ou} \quad (t_B - t_A)^2 > (x_B - x_A)^2/c^2 \quad (4)$$

si on choisit les deux événements comme se produisant sur l'axe des x .

(a) Montrer que si l'inégalité (4) ci-dessus est vraie dans un référentiel elle est vraie dans tout référentiel en mouvement uniforme par rapport à lui. L'intervalle entre des événements est dit « de genre temps ».

Indice : Utiliser l'invariante par une transformation de Lorentz, Δs^2 , qui s'appelle l'intervalle (au carré) entre les événements A et B dans le référentiel R

$$\Delta s^2 := c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 \quad (5)$$

où $\Delta x = x_B - x_A$ et $\Delta t = t_B - t_A$.

(b) Montrer que si l'équation (4) ci-dessus est vraie, il existe au moins un référentiel R' où l'intervalle $t'_B - t'_A$ est propre (c'est-à-dire $x'_B = x'_A$), et il n'y a pas de référentiel où les événements soient simultanés.

(c) Si, au contraire

$$|t_B - t_A| < |x_B - x_A|/c \quad \text{ou} \quad (t_B - t_A)^2 < (x_B - x_A)^2/c^2 \quad (6)$$

montrer qu'il existe un référentiel où les événements soient simultanés, mais aucun où l'intervalle de temps soit propre. L'intervalle entre des événements est dit « de genre espace ».