L2 Physique : Introduction à la Relativité Restreinte -TD2

1 La transformation de Lorentz

(a) Un repère d'origine O' se déplace à la vitesse v par rapport à un repère d'origine O. La transformation de Lorentz permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

où $\beta = v/c$. Cette transformation s'approche à quoi pour les petites valeurs de $|\beta|$, *i.e.* $|\beta| \ll 1$? Gardez juste les termes en β avec au maximum la puissance un (ne gardez pas les termes β^2 ou β^3 etc.)

Indice : Le développement limité du facteur de Lorentz γ en puissances de $\beta = v/c$, au voisinage de $\beta = 0$, est :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots \tag{1}$$

(a) solution : Il y a deux termes à considérer. Pour le premier le développement limité du facteur de Lorentz nous donne

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + O(\beta^2) \tag{2}$$

Pour le deuxième le développement limité nous donne

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta + O(\beta^3). \tag{3}$$

Et donc la transformation (d'un boost)

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \tag{4}$$

Pour des vitesses faibles devant celle de la lumière ($v \ll c$), on a $\beta \ll 1$ et donc $\gamma \simeq 1$. Les corrections relativistes sont alors très petites : le premier terme correctif est de l'ordre de $\beta^2 = (v/c)^2$, ce qui montre que les effets relativistes deviennent significatifs uniquement lorsque v est proche de c.

(b) De plus, supposons que l'ordre de grandeur de x' soit comparable à celui de vt' ; dans ce cas, on écrit $x' \sim vt'$ ou $x' = O(vt')$. Dans le cas où $|\beta| \ll 1$, vers quoi la transformation tend-elle ?

(b) solution : Il y a deux équations dans cette transformation. La première est

$$\begin{aligned} ct &= ct' + \beta x' + O(\beta^2) = ct' + O(\beta v t') = ct'(1+\beta^2), \\ t &= t' + O(\beta^2) \end{aligned} \tag{5}$$

La deuxième est

$$x = x' + \beta(ct') = x' + \frac{v}{c}(ct') = x' + vt' = x' + vt + O(\beta^2). \tag{6}$$

Il s'agit de la transformation de Galilée.

2 Dilatation du temps

Les muons sont les particules les plus nombreuses dans le rayonnement cosmique à des altitudes de l'ordre de quelques kilomètres. Un compteur A était installé au sommet du Mont Washington (États-Unis) à une altitude de 1910 mètres (*Frisch and Smith*, 1963). Il était réglé pour compter les muons voyagant verticalement vers le sol et ayant des vitesses proches de 99,52% de la vitesse de la lumière. Il enregistrait 563 ± 5 muons par heure. Un second compteur B identique à celui de A était installé près de la mer à une altitude de 3 mètres et il enregistrait 420 ± 5 muons par heure. L'intensité des rayons cosmiques ne varie pas d'un endroit à l'autre si proche. Rappelez-vous que le muon est instable et une population varie selon la loi :

$$N(t) = N(0)\exp(-t/\tau) \tag{7}$$

où τ représente le temps de vie moyen avec $\tau = 2,2 \times 10^{-6}$ s et t est le temps propre.

(a) Trouver l'intervalle de temps $\Delta t'$ pris par un muon pour traverser l'altitude du compteur A jusqu'au compteur B dans un référentiel fixé sur la terre.

Solution

Il n'y a rien difficile ici :

$$\Delta t' = \frac{\Delta z'}{v} \tag{8}$$

avec

$$\Delta z' = 1910 - 3 \text{ m} = 1907 \text{ m}, \tag{9}$$

et

$$v = 0,9952c \text{ m/s} = 2,9856 \times 10^8 \text{ m/s}, \tag{10}$$

Donc,

$$\Delta t' = \frac{\Delta z'}{v} = 6,387 \times 10^{-6} \text{ s}. \tag{11}$$

Il s'agit d'un intervalle du temps impropre car il y a une partie spatiale dans l'intervalle entre les deux événements du muon passant par compteur A et par compteur B. On a besoin de deux horloges : une horloge situé à A et une horloge situé à B pour enregistrer l'intervalle du temps.

(b) La loi (7) est valable dans un référentiel pour lequel le muon est au repos. Trouver l'intervalle de temps propre Δt correspondant à $\Delta t'$.

Solution On utilise la loi donné pendant CM 3 :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}, \qquad \text{où } \Delta t' = 6,387 \times 10^{-6} \text{ s.} \tag{12}$$

Le facteur de Lorentz est ici :

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,9952^2}} = 10,22. \tag{13}$$

On obtient :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} = \frac{6,387 \times 10^{-6}}{10,22} = 6,25 \times 10^{-7} \text{ s.} \tag{14}$$

Il s'agit d'un intervalle du temps propre car la partie spatiale dans l'intervalle entre les deux événements du compteur A passant par le muon et du compteur B passant par le muon est zero ; le muon est stationnaire. On n'a seulement besoin d'une horloge pour enregistrer l'intervalle du temps : une horloge situé à coté du muon.

(c) Utiliser (7) pour verifier les resultats de compteur B.

Solution Développer le membre droite. Attention : La loi (15) est valable dans un référentiel pour lequel le muon est au repos. Alors t est le temps propre.

$$N(t) = 563 \exp(-6,25 \times 10^{-7}/2,2 \times 10^{-6}) = 424,3 \tag{15}$$

Le membre gauche est 420 ± 5 et donc c'est assez proche.

(d) Dans un référentiel R qui se déplace avec les muons, les muons sont immobiles mais la terre s'approche à une vitesse $\beta = 0,9952c$. Quel temps met un muon pour traverser l'altitude du compteur A jusqu'au compteur B ? Indice : il n'y a pas de calcul à faire. Il faut simplement comprendre ce que vous avez fait ci-dessus.

Solution

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} = \frac{6,387 \times 10^{-6}}{10,22} = 6,25 \times 10^{-7}. \tag{16}$$

(e) Dans le référentiel R, quelle est la distance verticale entre les compteurs A et B ?

Solution
Il n'y a rien difficile ici :

$$\Delta z = \Delta t \; v = 6,25 \times 10^{-7} \text{ s} \times 2,9856 \times 10^{8} \text{ m/s} = 186,6 \text{ m.} \tag{17}$$

3 Contraction des longueurs

Refaire le calcul de question (e) de l'exercice précédent, en utilisant la formule de contraction des longueurs.

Solution On utilise la loi donné pendant CM 3 : La longueur impropre L est lié à la longueur propre L_0 par :

$$L = \frac{L_0}{\gamma}.$$

Ici, utilisant toujours sans prime pour le référentiel du muon, et avec prime pour le référentiel de la Terre, on a une longuer propre $\ell' = 1907\text{m}$ entre les deux compteurs A et B parce qu'ils sont stationaires dans le référentiel de la Terre. Dans le référentiel du muon, où les compteurs se déplacent, on a une distance impropre ℓ qui est lié à ℓ' par :

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma} = \frac{1907 \text{ m}}{10,22} = 186,6 \text{ m}. \tag{18}$$

Références

Frisch, D. H., and J. H. Smith (1963), Measurement of the relativistic time dilation using μ-mesons, *American Journal of Physics*, *31*(5), 342–355.