

L2 Physique : La vitesse de la lumière est constante -TD1

Licence 2 Physique

1 Equations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (2)$$

où

\vec{E} est le champ électrique et \vec{B} est le champ magnétique

ρ la densité de charge électrique (un champs scalaire réel) et \vec{J} la densité de courant

ε_0 la permittivité diélectrique du vide et μ_0 perméabilité magnétique du vide.

Dans un système de coordonnées cartésiennes, avec base orthonormée $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \\ \vec{E} &= E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (3)$$

etc.

(a) Ecrire les équations de Maxwell dans le vide. Indice : Dans le vide, on a $\rho = 0$ et $\vec{J} = 0$. Remarquez-vous une symétrie ?

(b) Utiliser les équations de Maxwell dans le vide pour trouver une équation en \vec{E} (sans \vec{B} explicite) pour $\partial \vec{E} / \partial t$. Indice : (dans un système de coordonnées cartésiennes) on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times = \vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \quad (4)$$

parce que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \quad (5)$$

et les vecteurs de base \vec{e}_x, \vec{e}_y and \vec{e}_z sont constants. Identité utile :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}, \quad (6)$$

où $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ est le laplacien, pour tous champs vectoriel \vec{V} avec dérivées continues.

(c) Utiliser les équations de Maxwell dans le vide pour trouver une équation en \vec{B} (sans \vec{E} explicite) pour $\partial \vec{B} / \partial t$.

(d) Est-ce que $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ est une solution ? Ici, \vec{E}_0 est un vecteur constant, $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ est le vecteur position et $\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z$ est un vecteur constant qui s'appelle le vecteur d'onde, ω est la fréquence angulaire (une constante réelle), $\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence

(e) Trouvez une interprétation physique du paramètre $(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$. Indice : Rappellez-vous que la norme $k = \sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k}}$ du vecteur d'onde \vec{k} est directement liée à la longueur λ d'onde par l'équation $k = 2\pi/\lambda$.

Solution (a)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8)$$

Solution (b) Effectuer $\vec{\nabla} \times$ sur l'équation à la gauche de (8).

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (9)$$

Effectuer $\frac{\partial}{\partial t}$ sur l'équation à la droite de (8).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial t} \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Mets ce résultat dans l'équation ci-dessus

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Exploitant l'identité (6), on a

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Solution (c) Effectuer $\vec{\nabla} \times$ sur l'équation à la droite de (8) et effectuer $\frac{\partial}{\partial t}$ sur l'équation à la gauche de (8) cette fois-ci. On trouvera

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \\ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Solution (d) On remplace $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ dans l'équation (12). On trouvera

$$-\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} - \vec{E}_0 (\nabla \cdot \nabla) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) = 0, \quad (14)$$

Le laplacien, $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ exige que nous

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

On commence avec $\frac{\partial}{\partial x}$: Remarquez-vous, puisque $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ on a $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. Et donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) &= ik_x \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) &= (ik_x)^2 \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) = -k_x^2 \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \end{aligned} \quad (16)$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) &= -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= -\|\vec{k}\|^2 \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)). \end{aligned} \quad (17)$$

On mets ce résultat dans (14), on trouve

$$(-\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + \|\vec{k}\|^2) \vec{E} = 0, \quad (18)$$

d'où on a trouvé une condition pour une solution de la forme $\vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + \|\vec{k}\|^2) &= 0, \\ \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} &= \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Solution (e) Les solutions $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ sont des ondes planes.
La condition

$$\frac{\omega}{\|\vec{k}\|} = 2\pi f \frac{\lambda}{2\pi} = c \quad (20)$$

où c est la vitesse (de phase) des ondes planes. Alors,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (21)$$

est la vitesse (de phase) des ondes du champ électrique. Parce que l'on a les mêmes ondes dans le champ magnétique, ils s'appellent les ondes électromagnétiques. La lumière étant liée aux ondes électromagnétiques, c est également la vitesse de la lumière dans le vide.

2 Relativité de Galilée appliquée à l'électromagnétisme

Imaginer que l'année est 1904, et que vous, tout comme Einstein, voulez appliquer la relativité de Galilée aux équations de Maxwell dans le vide.

- (a) Est-ce que les équations de Maxwell s'appliquent dans tout référentiels inertiels ?
- (b) Même dans le vide ?
- (c) Est-ce que des ondes planes électromagnétiques peuvent se-propager dans le vide ?
- (d) Quelles est la vitesse des ondes planes électromagnétiques dans le vide ? (Pour tous référentiels ?)

Solution

- (a) Oui ! les équations de Maxwell s'appliquent dans tout référentiels inertiels !
- (b) Oui ! Même dans le vide.
- (c) Oui ! On peut avoir des ondes planes électromagnétiques se-propagerant dans le vide.
- (d) La vitesse des ondes planes électromagnétiques dans le vide doit être c , pour tous référentiels.

3 Relativité de Galilée appliquée à la mécanique newtonienne

On peut représenter une molécule d'hydrogène comme deux corps avec un ressort entre eux, avec raideur k . Supposons que le centre de masse de la molécule est stationnaire dans un référentiel inertiel R et que la molécule ne tourne pas. Place l'axe de molécule le long de l'axe des x , comme dans le Fig. 1. La force sur une des deux atoms d'hydrogens à position x est égale à

$$F = k(x - x_0) \quad (22)$$

où x_0 est la position où la masse est au repos.

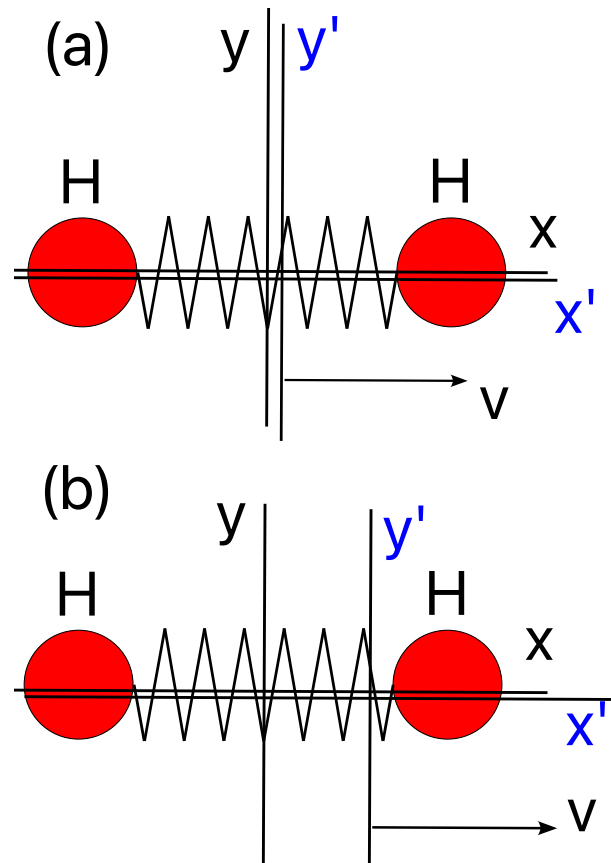


FIGURE 1 – (a) Molécule d’hydrogène à l’origine de R , l’axe de vibration aligné le long de l’axe des x . (b) Le système plus tard : le référentiel R' se déplace le long de l’axes des x lorsque la molécule reste stationnaire en R .

Suivant la loi fondamentale de Newton, on peut montrer que l’équation du mouvement d’une masse s’écrit

$$\frac{d^2(x - x_0)}{dt^2} + \omega^2(x - x_0) = 0, \quad (23)$$

où $\omega^2 = k/m$ et $(x - x_0)$ est la distance de la masse par rapport à la position x_0 où la masse est au repos.

(a) Pour moléculaire hydrogène, $k = 5,8$ m dyn par Angstrom (Zhao et al., 2022). La masse d’un atome d’hydrogène, 1 Da, ou $1,66 \times 10^{-27}$ kg. Trouver la fréquence de vibration d’hydrogène en Hz, $f = \omega/(2\pi)$.

Maintenant, observer ce système dans un référentiel inertiel R' qui se déplace le long de l’axe des x à vitesse constante v .

(b) Si à $t = 0$ l’origine de $R' = 0$, coïncide avec l’origine de R , démontrer (supposant la physique classique de Galilée et Newton) que les coordonnées de la molécule se transforme comme

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - vt, \\ y' &= y \end{aligned} \quad (24)$$

L’équation (24) s’appelle une transformation de Galilée.

(c) Démontrer que la force sur un atome d’hydrogène est la même dans R et R' . Nous disons que la force reste invariante sous une transformation de Galilée.

(d) Démontrer que l'accélération d'un atome d'hydrogène est la même dans R et R' . Nous disons que l'accélération reste invariante sous une transformation de Galilée.

(e) Démontrer que la fréquence de vibration d'un atome d'hydrogène est la même dans R et R' .

Solution

(a) Il faut convertir les unités en SI.

$$\begin{aligned} k &= 5,8 \text{mdyn}/\text{Å} = 5,8 \times 10^{-3} \text{dyn}/\text{Å} = 5,8 \times 10^{-3} \text{dyn} \times 10^{-5} \text{N}/\text{dyn}/\text{Å} \\ &= 5,8 \times 10^{-8} \text{N}/\text{Å} = 5,8 \times 10^{-8} \text{N}/\text{Å} \times 10^{10} \text{Å}/\text{m} = 580 \text{N}/\text{m}. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{580}{1,66 \times 10^{-27}}} = 9,4 \times 10^{13} \text{Hz} = 94 \text{THz}. \quad (26)$$

(b) Supposant la physique classique de Galilée et Newton, la coordonnée temporelle t ne change pas, donc $t' = t$. Il n'y a pas de mouvement le long de l'axe des y , donc $y' = y$. Par contre, l'origine O' de R' se déplace vers la droite suivant l'équation dans R : $x = vt$. Les coordonnées x' sont les distances par rapport à cette origine ; donc on a pour les coordonnées $x' = x - vt$. Ça donne :

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - vt, \\ y' &= y \end{aligned} \quad (27)$$

(c) La force est proportionnelle à la distance entre l'atome et sa position au repos. Tous les deux se transforment de la même façon, donc la force reste invariante. En effet, dans R on a

$$F = k(x - x_0) \quad (28)$$

En R' on a

$$F' = k(x' - x'_0) = k((x - vt) - (x_0 - vt)) = k(x - vt - x_0 + vt) = k(x - x_0) = F. \quad (29)$$

(d) La vitesse des ondes planes électromagnétiques dans le vide doit être c , pour tous référentiels. Si l'accélération d'un corps est $a = d^2x/dt^2$ en R elle serait, en R'

$$a' = \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2(x - vt)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - v \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = a. \quad (30)$$

On remarque qu'il est important que v soit constante pour maintenir cette invariance d'accélération sous une transformation de Galilée.

(e) Le système résout la même équation (23) en R'

$$\frac{d^2(x' - x'_0)}{dt^2} + \omega^2(x' - x'_0) = 0, \quad (31)$$

et donc il a la même solution et la même fréquence. Sinon, les molécules auraient les propriétés différentes selon le référentiel inertiel, nous permettant de distinguer les référentiels inertiels et d'identifier le mouvement absolu. Cette possibilité serait contre la relativité de Galilée (et celle d'Einstein).

Références

Zhao, Lili, Zhi, Minna, and Frenking, Gernot. 2022. The strength of a chemical bond. *International Journal of Quantum Chemistry*, **122**(8), e26773.