L2 Physique : La vitesse de la lumière est constante -TD1

Licence 2 Physique

1 Equations de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right), \tag{2}$$

où

$\vec{E}$ est le champ électrique et $\vec{B}$ est le champ magnétique

ρ la densité de charge électrique (un champs scalaire réel) et $\vec{J}$ la densité de courant

ε_0 la permittivité diélectrique du vide et μ_0 perméabilité magnétique du vide.

Dans un systeme de coordonnées cartésiennes, avec base orthonormée $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z},\\ \vec{E} &= E_x\vec{e}_x+E_y\vec{e}_y+E_z\vec{e}_z,\end{aligned} \tag{3}$$

etc.

(a) Ecrire les équations de Maxwell dans le vide. Indice : Dans le vide, on a $\rho = 0$ et $\vec{J} = 0$. Remarquez-vous une symétrie ?

(b) Utiliser les équations de Maxwell dans le vide pour trouver une équation en $\vec{E}$ (sans $\vec{B}$ explicite) pour $\partial\vec{E}/\partial t$. Indice : (dans un système de coordonnées cartésiennes) on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times = \vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t} \tag{4}$$

parce que

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right), \tag{5}$$

et les vecteurs de base $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ and $\vec{e}_z$ sont constants. Identité utile :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{V})-\nabla^2\vec{V}, \tag{6}$$

où $\nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ est le laplacien, pour tous champs vectoriel $\vec{V}$ avec dérivées continues.

(c) Utiliser les équations de Maxwell dans le vide pour trouver une équation en $\vec{B}$ (sans $\vec{E}$ explicite) pour $\partial\vec{B}/\partial t$.

(d) Est-ce que $\vec{E} = \vec{E}_0\exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t))$ est une solution ? Ici, $\vec{E}_0$ est un vecteur constant, $\vec{r} = x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z$ est le vecteur position et $\vec{k} = k_x\vec{e}_x+k_y\vec{e}_y+k_z\vec{e}_z$ est un vecteur constant qui s'appelle le vecteur d'onde, ω est la fréquence angulaire (une constante réelle), $\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence

(e) Trouvez une interprétation physique du paramètre $(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$. Indice : Rappellez-vous que la norme $k = \sqrt{\vec{k}\cdot\vec{k}}$ du vecteur d'onde $\vec{k}$ est directement liée à la longueur λ d'onde par l'équation $k = 2\pi/\lambda$.

2 Relativité de Galilée appliquée à l'électromagnétisme

Imaginer que l'année est 1904, et que vous, tout comme Einstein, voulez appliquer la relativité de Galilée aux équations de Maxwell dans le vide.
(a) Est-ce que les équations de Maxwell s'appliquent dans tout référentiels inértiels ?
(b) Même dans le vide ?
(c) Est-ce que des ondes planes électromagnétiques pouvent se-propager dans le vide ?
(d) Quelles est la vitesse des ondes planes électromagnétiques dans le vide ? (Pour tous référentiels ?)

3 Relativité de Galilée appliquée à la mécanique newtonienne

On peut représenter une molécule d'hydrogène comme deux corps avec un ressort entre eux, avec raideur k. Supposons que le centre de masse de la molécule est stationnaire dans un référentiel inértiel R et que la molécule ne tourne pas. Place l'axe de molécule dans le long de l'axe des x, comme dans le Fig. 1. La force sur une des deux atoms d'hydrogens à position x est égale à

$$F = k(x - x_0) \tag{7}$$

où x_0 est la position où la masse est au repos.

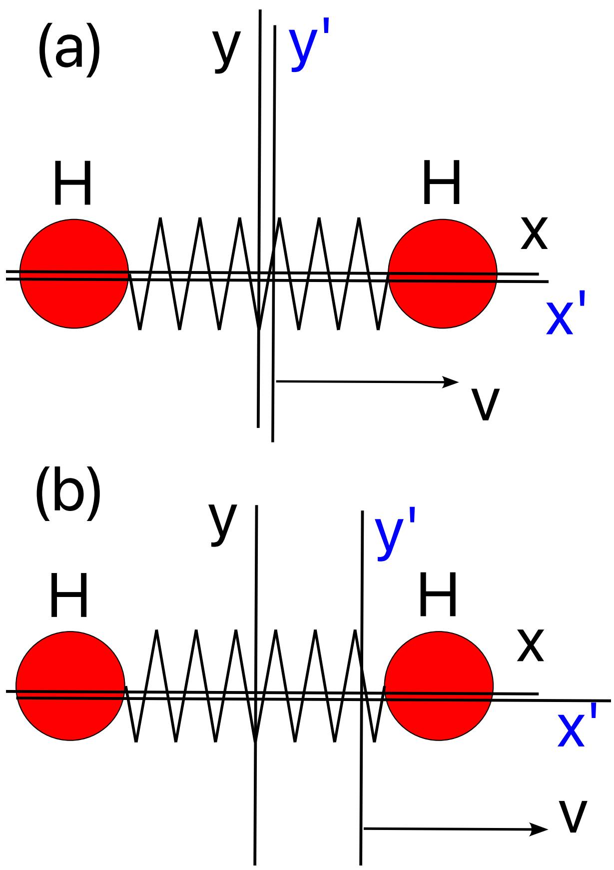

FIGURE 1 – (a) Molécule d'hydrogène à l'orgine de R, l'axe de vibration aligné le long de l'axe des x. (b) Le système plus tard : le référentiel R' se déplace le long de l'axes des x lorsque la molécule reste stationnaire en R.

Suivant la loi fondamentale de Newton, on peut montrer que l'équation du mouvement d'une masse s'écrit

$$\frac{d^2(x-x_0)}{dt^2} + \omega^2(x-x_0) = 0, \tag{8}$$

où $\omega^2 = k/m$ et $(x - x_0)$ est la distance de la masse par rapport à la position x_0 où la masse est au repos.
(a) Pour molécular hydrogène, $k = 5,8$ mdyn par Angstrom (Zhao et al., 2022). La masse d'un atome d'hydrogène, 1 Da, ou $1,66 \times 10^{-27}$ kg. Trouver la fréquence de vibration d'hydrogène en Hz, $f = \omega/(2\pi)$.

Maintenant, observer ce système dans un référentiel inertiel R' qui se déplace le long de l'axe des x à vitisse constante v.
(b) Si à $t = 0$ l'origine de $R' = 0$, coincïde avec l'origine de R, démontrer (supposant la physique classique de Galilée et Newton) que les coordonnées de la molécule se transforme comme

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - vt, \\ y' &= y \end{aligned} \tag{9}$$

L'équation (9) s'appelle une transformation de Galilée.
(c) Démontrer que la force sur un atome d'hydrogène est la même dans R et R'. Nous disons que la force reste invariante sous une transformation de Galilée.
(d) Démontrer que l'accéleration d'un atome d'hydrogène est la même dans R et R'. Nous disons que l'accéleration reste invariante sous une transformation de Galilée.
(e) Démontrer que la fréquence de vibration d'un atome d'hydrogène est la même dans R et R'.

Références

Zhao, Lili, Zhi, Minna, and Frenking, Gernot. 2022. The strength of a chemical bond. *International Journal of Quantum Chemistry*, **122**(8), e26773.