Cours 4 : L'espace-temps de Minkowski

— Résumé du dernier cours sur les phénomènes relativistes.
— Un autre phénomène relativiste : $E = mc^2$
— La signification absolue de l'intervalle d'espace-temps.
— Cone de lumière.
— Diagramme de Minkowski.
— Quadrivecterus.
— Le groupe de Lorentz encore !

Dilatation du temps

— Soient deux événements A et B tel que l'intervalle entre eux dans un référentiel inertiel R a une partie temporelle plus supérieure à la partie spatiale :

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2, \\ &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

On dit que l'intervalle est « du genre temps ».

— Alors dans tout référentiel on a $\Delta s^2 > 0$.

— Pourquoi ? Il y a un référentiel R' tel que A et B ont les mêmes coordonnées spatiales en R' :
$x'_A = x'_B, y'_A = y'_B, z'_A = z'_B$. (Voir l'exercice 2 de TD 3.)

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t')^2 \quad (2)$$

— Dans ce cas on dit que

$$\boxed{\Delta t' \equiv \Delta\tau = \frac{\Delta s}{c},} \qquad \text{intervalle du temps propre} \tag{3}$$

est un intervalle du temps propre.

— Par contre, Δt ici est une intervalle du temps impropre.

— Remarque : On peut trouver les intervalles du temps propres dans n'importe quel référentiel inertiel. Donc, il peut être Δt ou $\Delta t'$. Il faut introduire un nouveau symbole pour avoir notation standard pour l'intervalle du temps propre, c'est $\Delta\tau$.

— La relation entre des intervalles du temps $\Delta\tau$ et l'impropre Δt est :

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma},} \qquad \text{dilatation du temps} \tag{4}$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

— Noter bien que l'intervalle du temps propre est toujours inférieur à l'intervalle du temps impropre. On dit souvent que

  Les horloges en mouvement retardent.

  C'est outile pour aider la mémoire, mais il n'est pas tout à fait correcte de penser à ce phénomène de cette façon. Les horloges ils fonctionnent correctement sans retardant.

Exercice immédiat

1. Trouvez l'équation (4) pour la dilatation du temps à partir de la définition de l'intervalle du temps propre (3). Indice :

$$v^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 \tag{5}$$

Exercice immédiat : solution

1. Trouvez l'équation (4) pour la dilatation du temps à partir de la définition de l'intervalle du temps propre (3). Indice :

$$v^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 \qquad (6)$$

Solution

la définition de l'intervalle du temps propre

$$
\begin{aligned}
\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c} &= \frac{\sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}}{c} \\
&= \Delta t \sqrt{\frac{c^2}{c^2} - \frac{(\Delta x)^2}{c^2(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta y)^2}{c^2(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta z)^2}{c^2(\Delta t)^2}} \\
&= \Delta t \sqrt{1 - \frac{(\Delta x)^2}{c^2(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta y)^2}{c^2(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta z)^2}{c^2(\Delta t)^2}} \\
&= \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
&= \frac{\Delta t}{\gamma}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Contraction des longueurs

— On mesure la longueur d'une tige en déterminant les abscisses de ses extrémités. Si la tige est en mouvement on obtient sa longueur impropre, L.

— Si la tige est immobile on obtient sa longueur propre, L_0.

— La relation entre eux est

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}.} \tag{8}$$

— La longueur propre est donc toujours plus grande que la longueur mesurée dans un repère où la tige est en mouvement. C'est ce que l'on appelle *la contraction des longueurs*.

Distance propre

— Soient deux événements A et B tel que l'intervalle entre eux dans un référentiel inertiel R a une partie temporelle <u>inférieure</u> à la partie spatiale :

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2, \\ &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 < 0. \qquad (9)\end{aligned}$$

On dit que l'intervalle est « du genre espace ».

— Alors dans tout référentiel on a $\Delta s^2 < 0$.

— Pourquoi ? Alors il y a un référentiel R' tel que A et B ont les mêmes coordonnées temporelles ; en R', $ct'_A = ct'_B$. (Voir l'exercice 2 de TD 3.)

$$\Delta s^2 = \cancelto{0}{(c\Delta t')^2} - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \qquad (10)$$

— Dans ce cas on dit que

$$\boxed{\Delta\ell \equiv \sqrt{-\Delta s^2}}, \qquad \text{distance propre} \tag{11}$$

est une distance propre.

Un autre phénomène – l'énergie d'une particule relativite

— En physique newtonienne (c'est à dire, non-relativiste), l'énergie cinétique et quantité de mouvement d'une particule de masse m à cause de sa vitesse $\vec{v}$, de norme $v = \|\vec{v}\|$ sont égaux à

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v^2, \\ \vec{p} &= m\vec{v}. \end{aligned} \tag{12}$$

— En relativité restreinte, l'énergie et quantité de mouvement d'une particule de masse m et vitesse v est égale à

$$\boxed{E = \gamma m c^2,}$$
$$\boxed{\vec{p} = m\gamma\vec{v}.} \tag{13}$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

— Remarque : en physique newtonienne il y a toujours un référentiel inértiel pour lequel $v = 0 = E$, au moins pour un instant.

— Exercice immédiat : en relativité restreinte il y a toujours un référentiel inértiel pour lequel $v = 0$, au moins pour un instant. Trouver le minimum de l'énergie d'une particule de masse m.

Exercice immédiat : solution

1. Il est évident, $v = 0$ donne le minimum de γ, et donc

$$E = mc^2. \tag{14}$$

   Elle s'appelle l'énergie de la masse au repos.

Exercice immédiat

1. Developpez le γ en série de Taylor (comme vous avez fait en TD 2, exercice 2(b)) et gardez juste les premiers deux termes. Interpréter les premiers deux termes.

Exercice immédiat : solution

1. Developpez le γ en série de Taylor (comme vous avez fait en TD 2, exercice 2(b)) et gardez juste les premiers deux termes. Interpréter les premiers deux termes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O(\beta^4) \end{aligned} \tag{15}$$

Et donc, en gardant les termes à l'ordre β^2,

$$\begin{aligned} E = \gamma mc^2 &= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right), \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \end{aligned} \tag{16}$$

il s'agit de la somme de l'énergie de la masse au repos + énergie cinétique newtonienne.

L'espace-temps

Chapitre 4 des notes du cours de Jacques Langlois.

Notions clées (pas exhaustive) :

- L'intervalle Δs.
- Intervalle du genre temps, du genre espace, du genre lumière.
- Diagramme de Minkowski.
- quadrivecteur.

Intervalle d'espace-temps

- Un événement correspond à un point dans l'espace-temps à quatre dimensions. Il a lieu à un endroit et à un instant donnés.
- La transformation de Lorentz est construite pour que la quantité $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ soit invariante dans un changement de repère. Il en est de même pour la quantité :

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

  [Sinon, ça impliquerait une origine du système des coordonnées privilégiée.]
- On appelle Δs l'intervalle d'espace-temps entre deux événements. Cet intervalle étant le même pour tous les référentiels galiléens (*i.e.* inertiels) il a une signification

absolue.

— Pour des événements très proches l'intervalle devient infinitésimal et on peut écrire :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

(Pour être très precise, on devrait écrire :

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2,$$

mais personne ne le fait).

— Si l'intervalle entre deux événements est réel ($ds^2 > 0$) on dit que l'intervalle est *du genre temps*. Le temps écoulé est assez long pour que la séparation spatiale puisse être franchie par un objet matériel. Il peut exister une relation de cause à effet entre les deux événements.

— La trajectoire d'un objet ponctuel dans l'espace-temps est appelée *ligne d'univers*. Deux points appartenant à une ligne d'univers d'un objet matériel définissent nécessairement un intervalle de genre temps.

— Lorsque l'intervalle est nul les événements sont dits du genre lumière. Leur séparation spatiale est telle qu'il faut se déplacer à la vitesse de la lumière pour aller d'un point à l'autre dans l'intervalle de temps correspondant.

— Lorsque l'intervalle est imaginaire ($ds^2 < 0$) la séparation spatiale est trop grande pour qu'un signal puisse la franchir durant l'intervalle de temps correspondant. Il ne peut pas exister de relation causale entre les deux événements. Nous verrons que l'ordre des événements n'est pas nécessairement le même dans deux référentiels différents. Cet intervalle est dit du genre espace. (Nous allons le voir dans l'Exercice 2 du TD 3.)

— L'espace-temps utilisé en relativité restreinte est appelé espace-temps de Minkowski du nom du mathématicien qui l'a défini.

— On peut étudier les aspects essentiels de la relativité restreinte en utilisant une seule coordonnée spatiale. On trace des axes perpendiculaires correspondant à x et à ct. La ligne d'univers d'une particule au repos est une droite parallèle à l'axe ct. Pour un photon la ligne d'univers est une droite faisant un angle de 45° ou de 135° avec l'axe des x. Pour une particule se déplaçant à vitesse constante la ligne d'univers est une droite plus proche de l'axe ct que de l'axe des x.

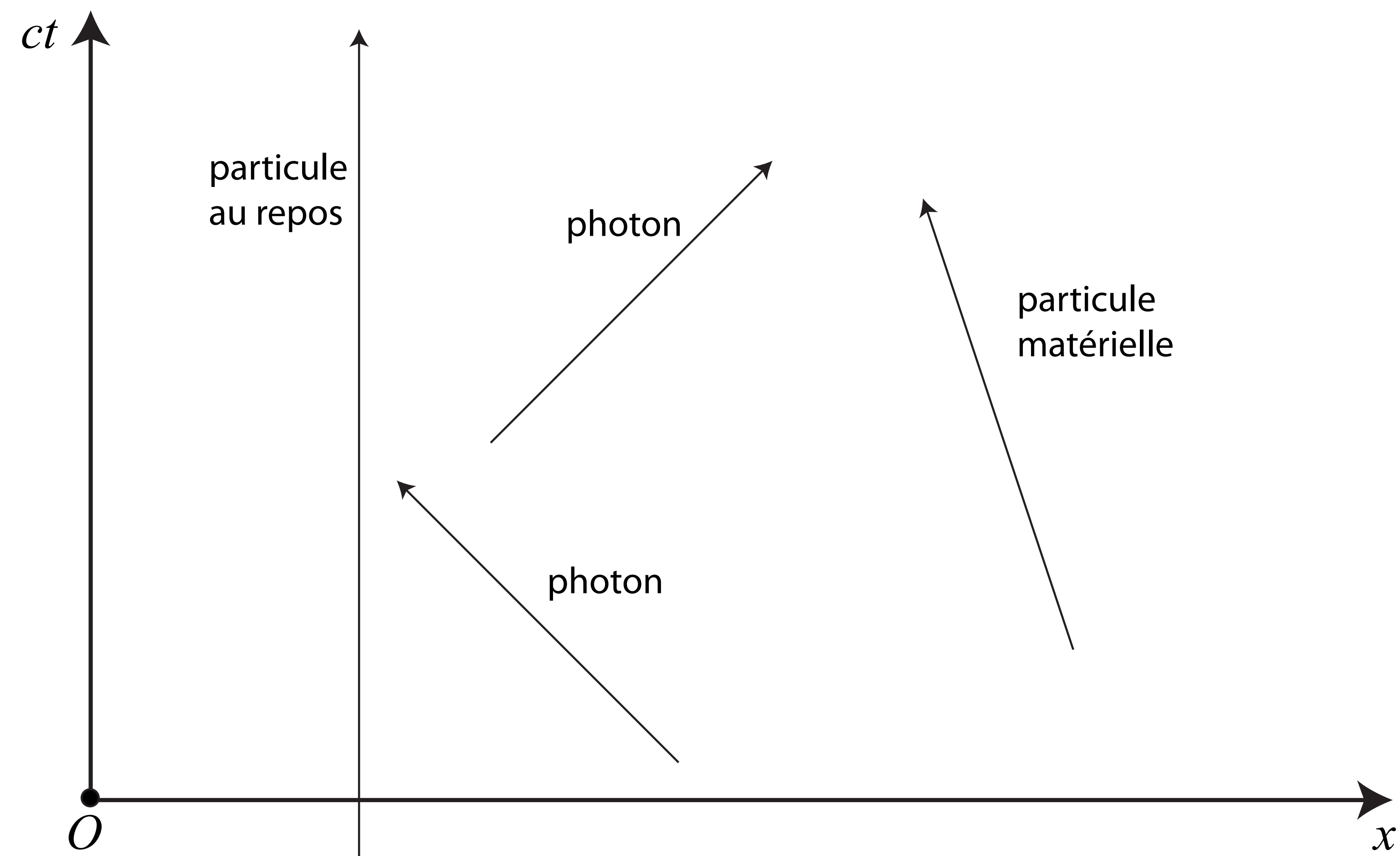

FIGURE 1 – Lignes d'univers des particules. Les photons ont forcement un angle de 45° ou de 135° avec l'axe des x. Les particules matérielles ont une ligne d'univers forcement plus proche de l'axe ct que de l'axe des x.

— Si on fait coïncider l'origine avec l'instant présent et la position « ici », les valeurs positives de ct représentent le futur et les valeurs négatives représentent le passé. Les régions pour les quelles $|x| < |ct|$ représentent le lieu des intervalles du genre temps. Les droites faisant un angle de $45°$ ou de $135°$ avec l'axe des x sont les lieux des intervalles du genre lumière. Les intervalles du genre espace correspondent aux régions ailleurs pour lesquelles $|x| > |ct|$.
— Avec deux dimensions d'espace, ce figure devient le cône de lumière. Ce cône de lumière divise l'espace-temps en différentes régions.
— Pour tous les événements situés à l'intérieur du cône de lumière, on a $\Delta s^2 > 0$ par rapport à l'origine. La composante temporelle domine la composante spatiale. L'intervalle de l'origine à l'événement est du genre temps, de sorte qu'une particule peut aller de l'origine à l'événement ;

la loi de causalité dit que un événement à l'origine peut être la cause des événements qui réside uniquement dans son cône de lumière futur.

— De même, un événement peut être le résultat d'une cause (un événement) antèrieur qui réside uniquement dans son cône de lumière passé.

— Les événements avec la grandeur $\Delta s^2 < 0$, l'intervalle est du genre espace et cela signifie que tous les événements sont situés à l'extérieur du cône de lumière. Etant donné que les événements ne peuvent plus être reliés entre eux par la particule, cette région est exclue de sa ligne d'univers. Cette région est dénommée l'ailleurs.

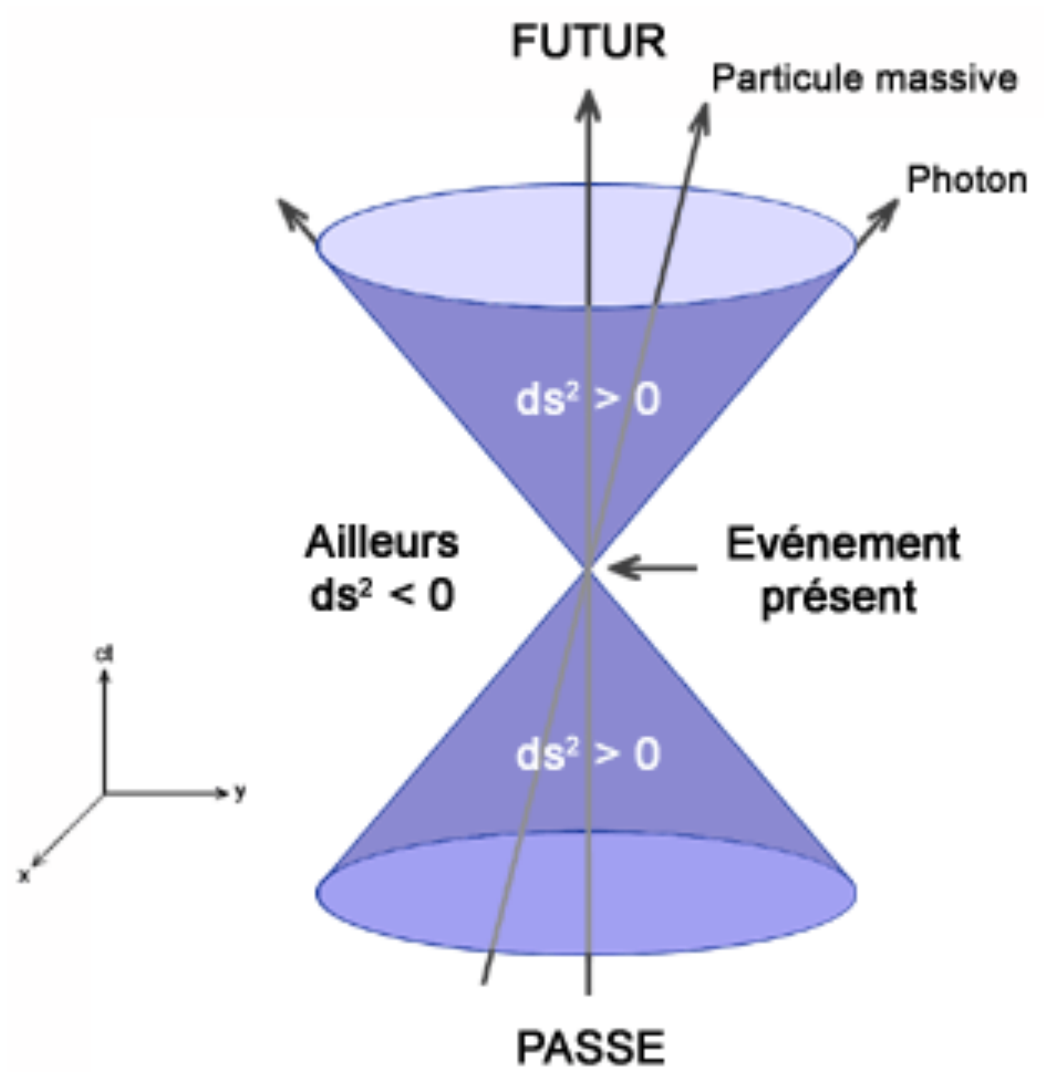

FIGURE 2 – Le cône de lumière en deux dimensions spatiales.

— Il est même plus difficile de visualiser le cone de lumière en 3 dimensions spatiales.

Diagramme de Minkowski pour deux référentiels en configuration standard

— Soitent R et R' deux référentiels en configuration standard.

— L'axe des ct' est l'ensemble des points $x' = 0$. Il s'agit de la ligne d'univers de l'origine O'. Par définition de la configuration standard on a :

$$ct = \frac{x}{\beta} \tag{17}$$

Donc l'axe ct' est une droite avec coefficient directeur $1/\beta$. Ça veut dire que l'angle θ de l'axe ct à l'axe ct' est tel que

$$\tan(\theta) = \beta, \quad \text{positive dans le sens anti-trigonométrique} \tag{18}$$

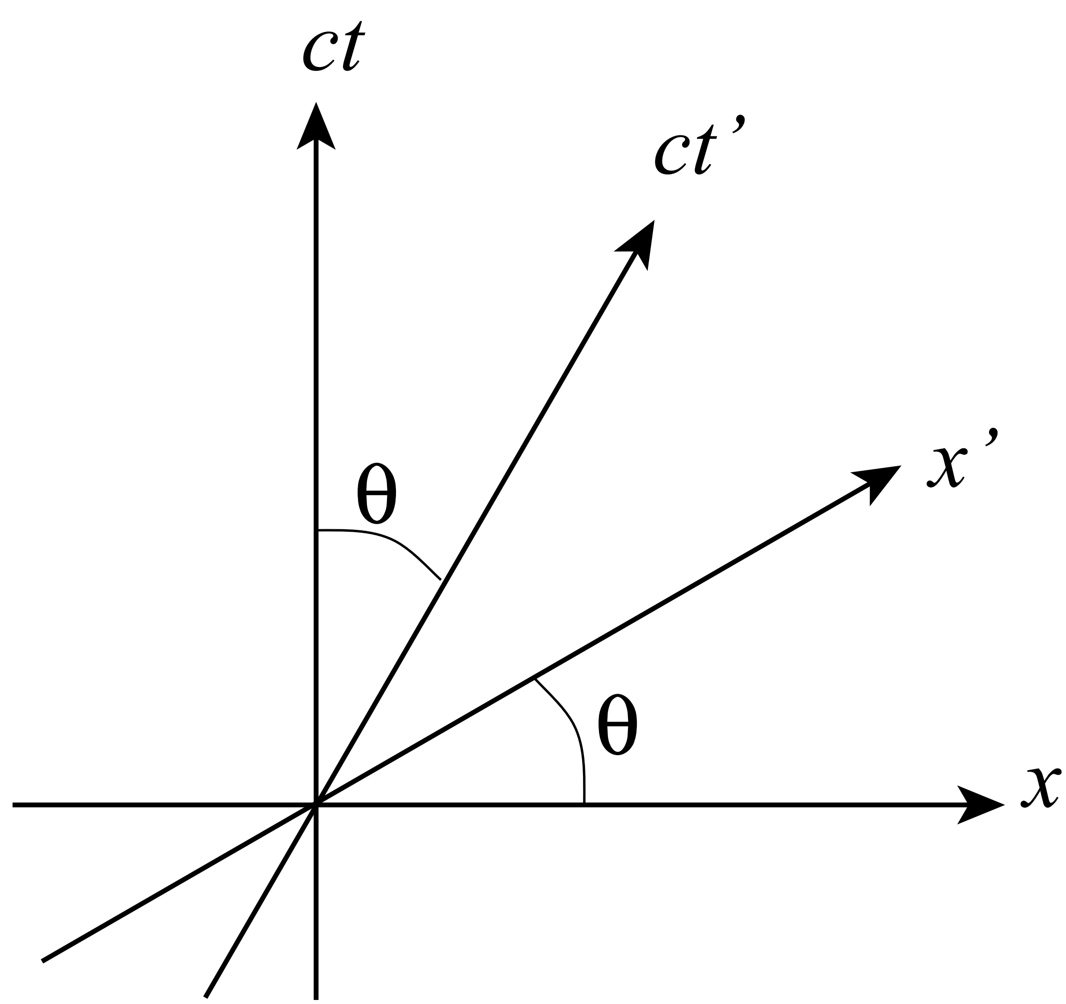

FIGURE 3 – Configuration standard avec $v/c = \beta = \tan(\theta)$.

— L'axe des x' est l'ensemble des points $t' = 0$.

— La transformation de Lorentz

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

nous donne :

$$\begin{aligned} 0 = ct' &= \gamma ct - \beta\gamma x, \\ ct &= \beta x. \end{aligned} \tag{19}$$

Il s'agit d'une droite avec coefficient directeur β. Ça veut dire que l'angle θ de l'axe des x à l'axe des x' est tel que

$$\tan(\theta) = \beta, \quad \text{positive dans le sens trigonométrique} \tag{20}$$

— Comment tracer les axes pour ct et x sur le diagramme de Minkowski pour R' ? On change le signe de β. Dans la configuration standard $\beta > 0$ donc on obtient

$$\tan(\theta) = -\beta \tag{21}$$

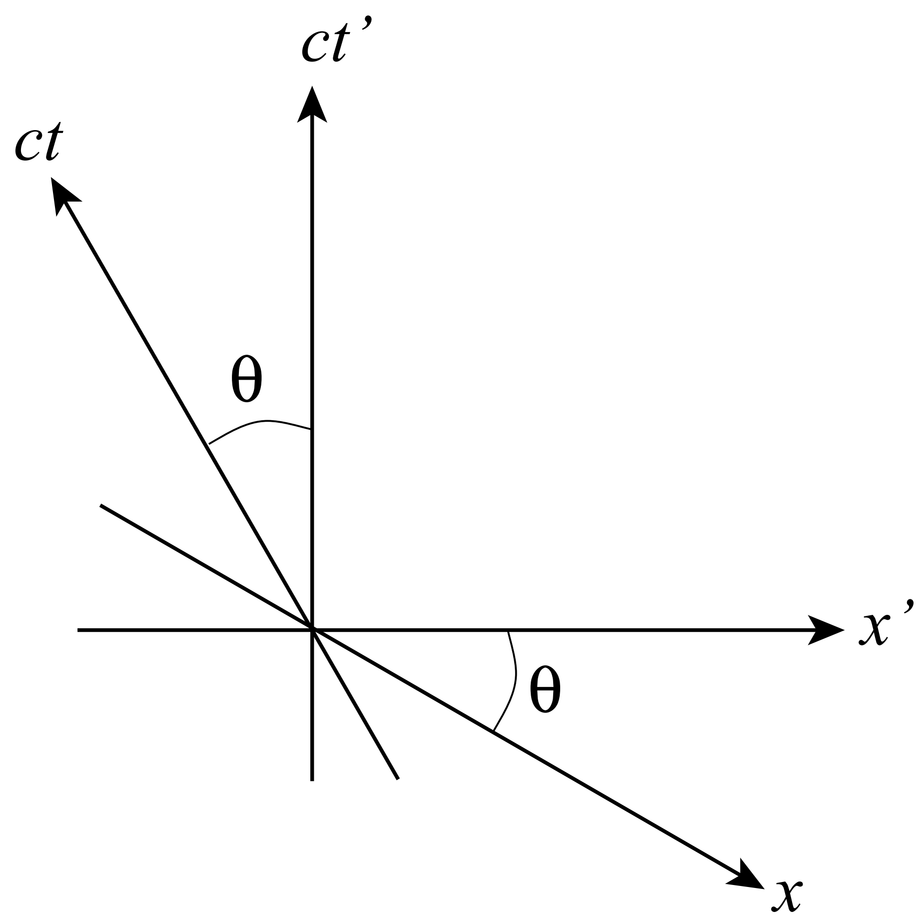

Figure 4 – Configuration standard avec $v/c = \beta = -\tan(\theta)$.

Exercice immédiat

1. Tracer les lignes d'univers des compteurs A et B dans l'expérience de muons dans le référentiel R' fixé par terre, et le référentiel R qui ce déplace avec un muon. Indiquer les intervalles du temps et longueurs propre est impropre que nous avons discuté dans le TD.

Exercices pour la maison

1. Quand est la loi de Galilée de l'addition des vitesse valable ?
2. (Examen de l'année 2015) J'ai deux fils, Red et Kas, et chacun a un vaisseau spatial. Un jour Red quitte à la vitesse $v = 3c/4$, par rapport à moi, vers la nébuleuse du Crabe. Au même instant Kas le suivre à la vitesse $v = c/2$ par rapport à moi. Calculer la vitesse de Red par rapport à Kas comme fraction de c.

Quadrivecteurs

— On appelle quadrivecteur position un ensemble de quatre composantes qui se transforment par une transformation de Lorentz.

— On appelle quadrivecteur $\vec{A}$ un ensemble de quatre composantes (A_t, A_x, A_y, A_z) qui se transforment de la même manière.

— Une quantité fondamentale invariante par une transformation de Lorentz est l'intervalle au carré Δs^2. Il s'écrit de la forme d'un produit scalaire

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \\ &= (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z), \end{aligned} \tag{22}$$

si on définie un nouveau produit scalaire,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_t B_t - A_x B_x - A_y B_y - A_z B_z. \tag{23}$$

Exercice immédiat

Définir les quadrivecteurs qui s'appelle la quadrivitesse $\vec{U}$ et quadri-impulsion $\vec{P}$,

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \gamma(c, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \vec{P} &= m\vec{U}, \end{aligned} \tag{24}$$

où $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sont les composantes x, y, z de la vitesse habituelle.

1. Montrer que la norme $\|\vec{U}\|^2 = \vec{U} \cdot \vec{U} = c^2$.
2. Montrer que

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 \tag{25}$$

   où p est la norme habituelle de l'impulsion relativiste $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ que l'on a vue dans l'Eq.(13), i.e.

$$p^2 = \gamma^2 m^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Le groupe de Lorentz, $SO(4)$.

Le groupe des transformations de Lorentz, $SO(4)$.

— Tous les transformations de Lorentz ensemble font le groupe de Lorentz, $SO(4)$.

— Ça comprend :

  — La transformation de Lorentz pour un boost le long de l'axe des x, disons $B_x(\beta)$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{26}$$

  qui relie les coordinées entre deux systèmes des coordinées en configuration standarde avec $v = \beta c$,

— et un rotation par anlge θ autour de l'axe des x, disons $R_x(\theta)$,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{27}$$

— et un rotation par anlge θ autour de l'axe des y, disons $R_y(\theta)$,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{28}$$

  — Et tous les produits des matrices ci-dessus !

— Avec les produits matriciel de la forme $R_y(\pi/2)R_x(\theta)R_y(-\pi/2)$ on peut produire une rotation par angle θ autour de l'axe des z (à vous de le vérifier)

$$R_z(\theta) = R_y(\pi/2)R_x(\theta)R_y(-\pi/2). \tag{29}$$

— Avec les produits matriciel de la forme $R_y(\pi/2)B_x(\beta)R_y(-\pi/2)$ on peut produire un boost par velocity $v = \beta c$ le long de l'axe des z (à vous de le vérifier)

$$B_z(\beta) = R_y(\pi/2)R_x(\theta)R_y(-\pi/2). \tag{30}$$

— Avec les produits matriciel de la forme $R_z(-\pi/2)B_x(\beta)R_z(\pi/2)$ on peut produire un boost par velocity $v = \beta c$ le long de l'axe des y (à vous de le vérifier)

$$B_y(\beta) = R_z(-\pi/2)R_x(\theta)R_z(\pi/2). \tag{31}$$

— Et avec les boots le long de tous les trois axes spatiaux et les rotations autour de tous les trois axes spatiaux on peut construire tous les transformations de Lorentz.

Références

Smith, J. H. (1997), *Introduction à la relativité*, InterEditions, Paris, France.