Cours 3 : Phénomènes de la relativité restreinte

- Résumé du dernier cours : l'argument conduisant à la transformation de Lorentz.
- Les événements dans l'espace-temps et l'intervalle d'espace-temps qui les sépare.
- Les phénomènes relativistes :
  - Addition des vitesses.
  - Dilatation des durées.
  - Contraction des longueurs.
  - Équivalence masse-énergie.

Trouver la transformation de Lorentz : bilan

— On a supposé une relation linéaire entre les coordonnées (t, x) et (t', x'). (En fait, ce n'est pas nécessaire, mais cela rend la démonstration plus rapide.) Cela implique que la relation entre (t, x) et (t', x') peut s'écrire sous forme matricielle.

— On a utilisé le fait que l'origine O' se déplace à la vitesse $v = \beta c$ dans R : $\Longrightarrow \; L_{21} = -\beta L_{22}$.

— On a utilisé le fait que la vitesse de la lumière est $\pm c$ dans n'importe quel référentiel inertiel. On a trouvé $L_{11} = L_{22}$ et $L_{12} = L_{21}$.

— On a utilisé l'invariance de $c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$, ce qui donne $L_{22}^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$.

— Finalement, on choisit la racine positive afin que la transformation ne change pas la direction de l'axe des x.

Le groupe des transformations de Lorentz, $SO(1,3)$

— L'ensemble des transformations de Lorentz forme « le groupe de Lorentz », noté $SO(1,3)$.

— Il comprend tous les « boosts » le long de n'importe quel axe. Par exemple, la transformation de Lorentz correspondant à un boost le long de l'axe des x, notée $B_x(\beta)$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

qui relie les coordonnées de deux systèmes de coordonnées en configuration standard avec $v = \beta c$.

— Le groupe comprend aussi des rotations autour de n'importe quel axe spatial.

Par exemple, une rotation d'angle θ autour de l'axe des x, notée $R_x(\theta)$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2}$$

— Avec les boosts le long des trois axes spatiaux et les rotations autour de ces axes, on peut construire toutes les transformations de Lorentz.

Intervalle d'espace-temps

— Un événement correspond à un point dans l'espace-temps à quatre dimensions. Il a lieu en un endroit et à un instant donnés. On peut le représenter dans un système de coordonnées donné par quatre coordonnées, par exemple (ct, x, y, z).

— La transformation de Lorentz est construite de telle sorte que la quantité $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ soit invariante lors d'un changement de référentiel. Il en est de même pour la quantité :

$$\Delta s^2 \equiv s_{21}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \qquad (3)$$

[Sinon, cela impliquerait l'existence d'une origine privilégiée du système de coordonnées.]

— On appelle s_{21}^2 (le carré de) l'intervalle d'espace-temps entre deux événements. Cet intervalle étant le même pour tous les référentiels inertiels (*i.e.* galiléens), il a une signification absolue. (On en reparlera en L3.)

— En considérant la propagation de la lumière issue d'une source ponctuelle, nous avons vu que les postulats sont incompatibles avec la transformation de Galilée.
— Nous avons construit un argument physique montrant l'invariance des longueurs perpendiculaires au mouvement relatif (sinon, on obtient une violation du postulat 1).
— Nous avons utilisé les trois postulats pour déduire la transformation de Lorentz. Après quelques calculs, on obtient la transformation de Lorentz qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{4}$$

où (ct, x, y, z) sont les coordonnées d'un événement dans le repère inertiel R, et (ct', x', y', z') celles du même événement dans le repère inertiel R', dont l'origine se déplace le long de l'axe x avec une vitesse uniforme $v = \beta c$.

— La transformation inverse s'obtient simplement en remplaçant β par $-\beta$:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} . \tag{5}$$

— On appelle quadrivecteur un ensemble de quatre composantes qui se transforment de la même manière. Le cas particulier étudié ici est le quadrivecteur position.

Les phénomènes relativistes

Addition des vitesses

Voir (*Smith*, 1997, §5.1)

— Un repère d'origine O' se déplace à la vitesse v_1 par rapport à un repère d'origine O le long de l'axe x (configuration standard). Un autre repère d'origine O'' se déplace par rapport à celui d'origine O'. Voir la figure 1.

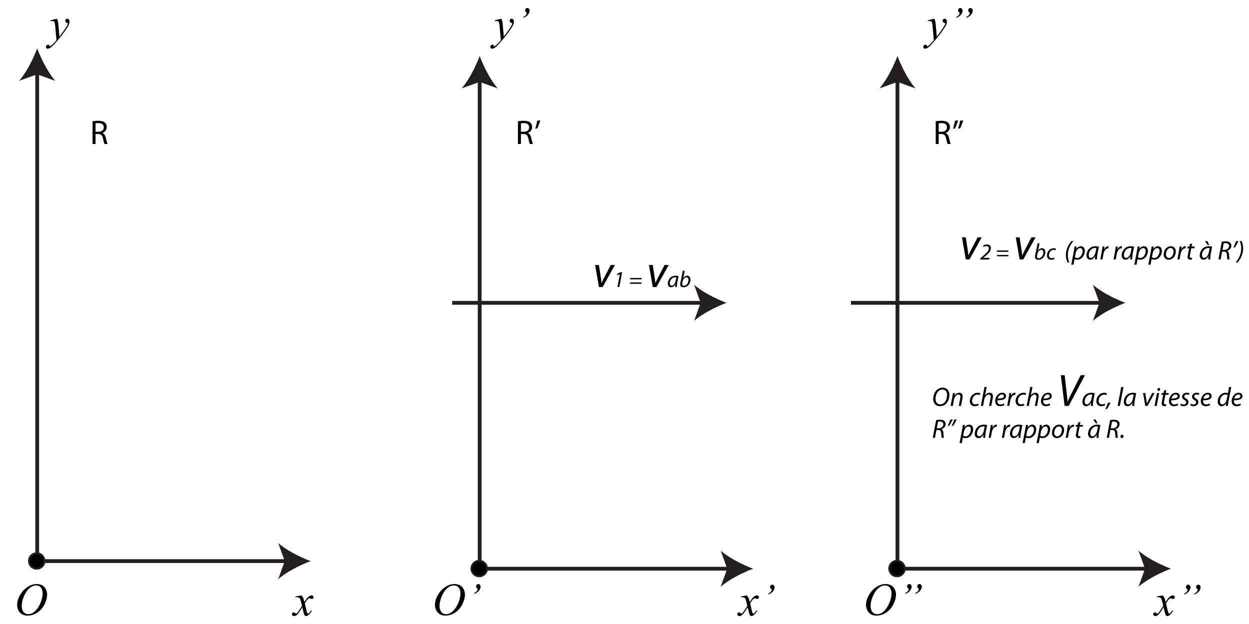

FIGURE 1 – Il y a trois repères inertiels, R, R' et R''. Le repère R' a la vitesse v_{ab} par rapport à R. Le repère R'' a la vitesse v_{bc} par rapport à R'. Nous cherchons la vitesse v du repère R'' par rapport à R.

— Nous cherchons à déterminer la vitesse de O'' par rapport à O.
— En appliquant la transformation de Galilée, on trouverait $v_{ac} = v_{ab} + v_{bc}$, mais cela pourrait conduire à une vitesse supérieure à celle de la lumière.
— La transformation de Lorentz (l'inverse d'un boost en configuration standard)

permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{ab} & \beta_{ab}\gamma_{ab} \\ \beta_{ab}\gamma_{ab} & \gamma_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

où $\beta_{ab} = v_{ab}/c$ et $\gamma_{ab} = 1/\sqrt{1-\beta_{ab}^2}$.

— La transformation appliquée entre les repères R' et R'' est

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{bc} & \beta_{bc}\gamma_{bc} \\ \beta_{bc}\gamma_{bc} & \gamma_{bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

où $\beta_{bc} = v_{bc}/c$ et $\gamma_{bc} = 1/\sqrt{1-\beta_{bc}^2}$.

En combinant ces deux transformations de Lorentz, on obtient :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{ab} & \beta_{ab}\gamma_{ab} \\ \beta_{ab}\gamma_{ab} & \gamma_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{bc} & \beta_{bc}\gamma_{bc} \\ \beta_{bc}\gamma_{bc} & \gamma_{bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}.$$

On note v_{ac} la vitesse de O'' par rapport à O. La transformation de Lorentz entre R et R'', sans passer par R', s'écrit

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{ac} & \beta_{ac}\gamma_{ac} \\ \beta_{ac}\gamma_{ac} & \gamma_{ac} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

où $\beta_{ac} = v_{ac}/c$ et $\gamma_{ac} = 1/\sqrt{1-\beta_{ac}^2}$.

En comparant les deux relations, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_{ac} &= \gamma_{ab}\gamma_{bc}(1+\beta_{ab}\beta_{bc}) \\ \beta_{ac}\gamma_{ac} &= (\beta_{ab}+\beta_{bc})\gamma_{ab}\gamma_{bc}. \end{aligned} \tag{6}$$

En divisant membre à membre, il vient

$$\beta_{ac} = \frac{\beta_{ab}+\beta_{bc}}{1+\beta_{ab}\beta_{bc}}$$

soit

$$\frac{v_{ac}}{c} = \frac{v_{ab}/c + v_{bc}/c}{1+v_{ab}v_{bc}/c^2}.$$

C'est-à-dire

$$\boxed{v_{ac} = \frac{v_{ab} + v_{bc}}{1 + \frac{v_{ab} v_{bc}}{c^2}}} \tag{7}$$

C'est **la loi d'addition des vitesses d'Einstein**, qui remplace celle de Galilée. La différence n'est pas très grande pour des vitesses très inférieures à celle de la lumière.

Prenons par exemple $v_{ab} = v_{bc} = \frac{3}{4}c$. On obtient

$$v = \frac{(3/4 + 3/4)c}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{25}c.$$

La vitesse résultante ne dépasse jamais c.

Exercices à la maison

1. Un événement correspond à un point dans l'espace-temps à quatre dimensions. Il est défini par une position et un instant donnés. Démontrer que le carré de l'intervalle d'espace-temps (ou pseudo-norme) entre deux événements A et B :

$$\Delta s^2 \equiv (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{8}$$

   est invariant par transformation de Lorentz.

   Solution : La transformation de Lorentz est linéaire. On peut donc l'écrire sous forme matricielle $X' = \Lambda X$. Par linéarité :

$$\Delta X' = X'_A - X'_B = \Lambda X_A - \Lambda X_B = \Lambda(X_A - X_B) = \Lambda\Delta X. \tag{9}$$

En considérant un boost selon l'axe x :

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Calculons l'intervalle dans le référentiel prime :

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &= (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \\ &= \gamma^2(c\Delta t - \beta\Delta x)^2 - \gamma^2(\Delta x - \beta c\Delta t)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= \gamma^2\left[(c\Delta t)^2 - 2\beta c\Delta t\Delta x + \beta^2\Delta x^2 - (\Delta x^2 - 2\beta\Delta x c\Delta t + \beta^2(c\Delta t)^2)\right] - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= \gamma^2(1-\beta^2)(c\Delta t)^2 - \gamma^2(1-\beta^2)\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Or, par définition du facteur de Lorentz, $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$. D'où :

$$\Delta s'^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s^2. \tag{12}$$

L'intervalle d'espace-temps est donc un invariant de Lorentz.

2. Vérifier par un calcul explicite que la transformation inverse est obtenue en changeant le signe de la vitesse (passage de v à $-v$).

   Solution : Multiplions la matrice de Lorentz $\Lambda(v)$ par $\Lambda(-v)$:

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

   Le produit matriciel nous donne :

$$a = d = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1. \tag{14}$$

$$b = e = -\gamma^2\beta + \gamma^2\beta = 0. \tag{15}$$

   Le résultat est la matrice identité I_4. Les deux matrices sont donc inverses l'une de l'autre.

3. Comparer les trois transformations : (i) Lorentz, (ii) Galilée, (iii) Rotation plane.

Que suggère le fait que le temps intervienne dans la transformation de Lorentz ?

Solution (Piste) : Contrairement à la transformation de Galilée où le temps est absolu ($t' = t$), la transformation de Lorentz mélange temps et espace, de façon analogue à une rotation (on parle de rotation hyperbolique). Cela suggère que le temps n'est qu'une dimension supplémentaire de l'espace-temps.

4. Regarder les vidéos de la chaîne "e-penser" :
   `https://www.youtube.com/watch?v=KX9QSjv0Ib0` et la suite
   `https://www.youtube.com/watch?v=_4Af9UrWEtc`

Dilatation des durées

Dilatation des durées

— Voir (*Smith*, 1997, §3.2)

— Un événement est un point de l'espace-temps. Pour simplifier, nous ne considérons qu'une seule dimension spatiale, selon l'axe (Ox).

Un événement E_1 a pour coordonnées (ct_1, x_1) dans le référentiel R et (ct'_1, x'_1) dans R', ce dernier étant en configuration standard par rapport à R. Pour un second événement E_2, les coordonnées sont respectivement (ct_2, x_2) et (ct'_2, x'_2). La transformation de Lorentz permet d'écrire :

$$\begin{aligned} ct_2 - ct_1 &= \gamma(ct'_2 - ct'_1) + \beta\gamma(x'_2 - x'_1) \\ c\Delta t &= \gamma c\Delta t' + \beta\gamma\Delta x' \end{aligned} \tag{16}$$

— **Conséquence :** Deux événements simultanés dans R' $(\Delta t' = 0)$ ne le sont généralement pas dans R dès lors qu'ils se produisent en des points distincts $(\Delta x' \neq 0)$.

— Cette **relativité de la simultanéité** est fondamentale : elle montre que la notion de « maintenant » dépend du référentiel de l'observateur.

Dilatation des durées : formule

— Considérons une horloge au repos dans R' (voir figure 2). Ce référentiel est appelé **référentiel propre** de l'horloge, et la durée mesurée par celle-ci est appelée le **temps propre** ($\Delta\tau$).

— L'intervalle de temps entre deux événements 1 et 2 mesuré dans R est plus long. On le déduit de la transformation de Lorentz :

$$c(t_2 - t_1) = \gamma c(t'_2 - t'_1) + \beta\gamma(x'_2 - x'_1)$$

Puisque l'horloge est au repos dans R', sa position est constante ($x'_1 = x'_2$), d'où $\Delta x' = 0$. On en conclut que l'intervalle de temps observé dans R est :

$$\begin{aligned} \cancel{c}(t_2 - t_1) &= \gamma\cancel{c}(t'_2 - t'_1) + \beta\gamma \cdot 0 \\ \Delta t &= \gamma \Delta t' \qquad (17) \end{aligned}$$

— Comme $\gamma > 1$ dès que $v \neq 0$, **l'intervalle de temps propre est toujours le plus court**. Cette propriété est intrinsèque au temps et ne dépend pas du type d'horloge utilisé. On appelle parfois l'intervalle mesuré dans R le **temps impropre**.

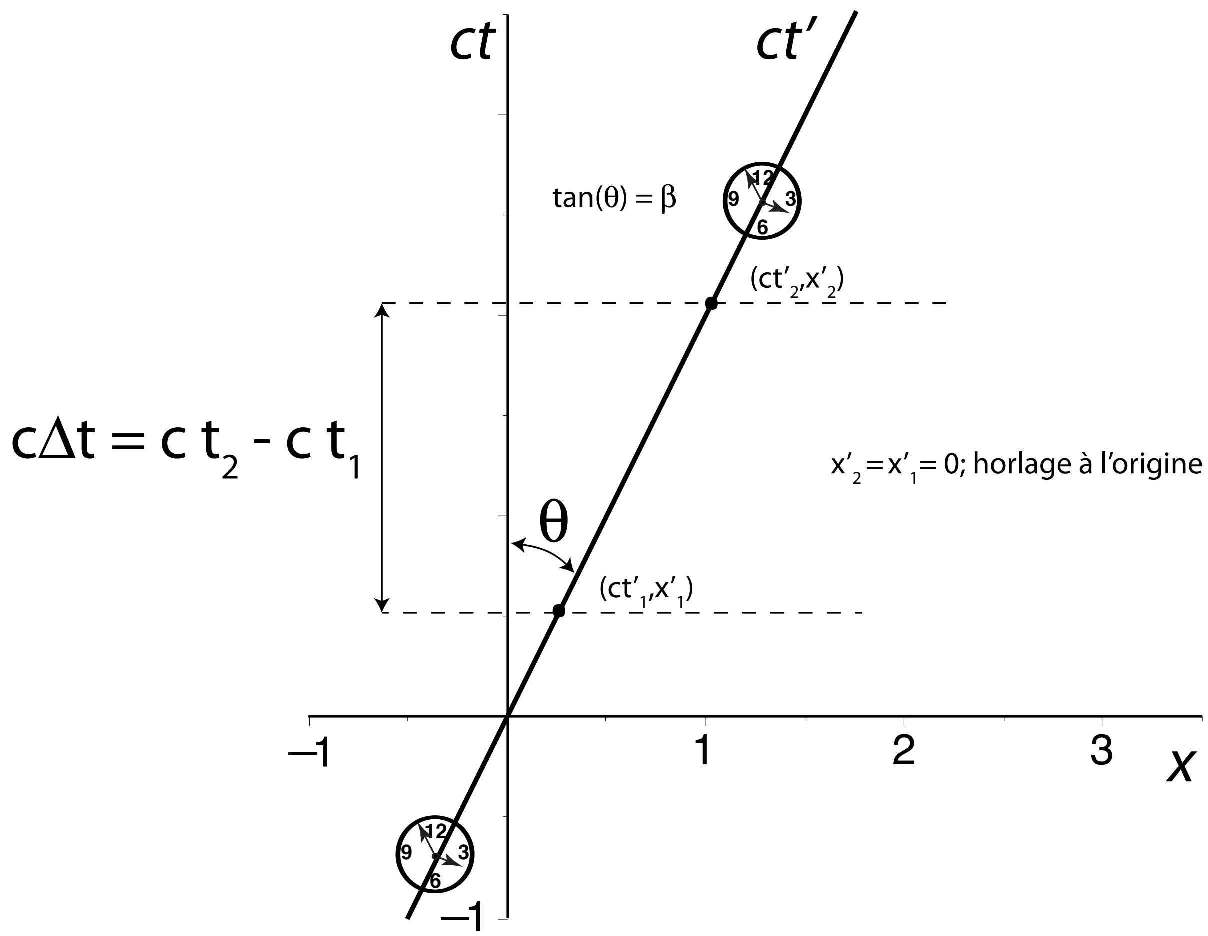

FIGURE 2 – Dilatation des durées

Dilatation des durées : Bilan

— L'intervalle de temps propre Δt_{propre} est relié à l'intervalle de temps impropre Δt par la formule :

$$\boxed{\text{Dilatation des durées :} \quad \Delta t_{propre} = \frac{\Delta t}{\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \tag{18}$$

où $v = \beta c$ est la vitesse de l'horloge.

— **Note sur les notations :** Ce n'est pas une erreur si j'utilise ici le symbole "prime" ($'$) différemment d'ailleurs. Je l'ai fait exprès pour attirer votre attention sur l'essentiel : l'intervalle de temps propre est toujours **le plus court**.

$$\text{Durée propre} = \frac{\text{Durée impropre}}{\gamma} \tag{19}$$

— **Comment les distinguer ?**
  — **L'intervalle propre** est mesuré par une **seule horloge** présente aux deux événements.
  — **L'intervalle impropre** est calculé à partir de deux mesures (t_1 et t_2) effectuées

en deux points de l'espace distincts. Cela nécessite **deux horloges** synchronisées, car dans un référentiel donné, les horloges sont fixes et ne réalisent que des mesures locales.

Dilatation des durées : approfondissement

- Nous allons « comprendre » l'origine de la dilatation des durées en nous appuyant sur le second postulat d'Einstein : l'invariance de la vitesse de la lumière c.
- Considérons une horloge à photons composée de deux miroirs parallèles séparés par une distance L. Un photon effectue des allers-retours entre ces miroirs (voir Fig. **??**).
- **Dans le référentiel propre R' :** Le photon parcourt la distance $2L$ verticalement à la vitesse c. L'intervalle de temps propre est :

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}$$

- **Dans le référentiel R (en mouvement relatif) :** Pour un observateur lié à R, l'horloge se déplace à la vitesse v. Le trajet du photon n'est plus un segment vertical mais une ligne brisée (trajectoire en dents de scie).

  Comme la vitesse de la lumière reste égale à c dans R, sa composante verticale est réduite à $\sqrt{c^2 - v^2}$ (par Pythagore). Le temps nécessaire à l'aller-retour est alors :

$$\Delta t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t'$$

— **Principe de relativité :** L'horloge à photons semble battre plus lentement vue de R. Ce phénomène doit s'appliquer à **toutes** les horloges (mécaniques, biologiques, atomiques) synchronisées avec elle dans R'. Sinon, on pourrait identifier un référentiel privilégié, ce qui contredirait le principe de relativité.

Exercices à la maison

1. Lire le §5.1 (*Smith*, 1997, §5.1).
2. Lire tout le chapitre 3 (au minimum les §3.2 et §3.5) de (*Smith*, 1997).
3. Essayer l'exercice 4 de (*Smith*, 1997) :

   > Alpha du Centaure est une étoile distante d'environ quatre années-lumière. [Il s'agit en réalité d'un système de trois étoiles qui apparaît, à l'œil nu, comme l'étoile la plus brillante de la constellation du Centaure et la troisième plus brillante du ciel nocturne.]
   >
   > Pour qu'une fusée effectue le voyage en un jour (temps propre pour ses occupants), à quelle vitesse devrait-elle voyager ? Les occupants de la fusée verraient Alpha du Centaure s'approcher à cette même vitesse. En déduire à quelle distance l'étoile leur semblerait être au début du voyage.

Exercices à la maison : Solution

1. **Exercice 4 de (*Smith*, 1997) :**

   > Alpha du Centaure est une étoile distante d'environ quatre années-lumière. Pour qu'une fusée effectue le voyage en un jour (pour ses occupants), à quelle vitesse devrait-elle voyager ? En déduire la distance à laquelle l'étoile leur semblerait être au début du voyage.

   Solution

   Considérons un référentiel inertiel R dans lequel le Soleil et Alpha du Centaure sont **immobiles**. Plaçons le Soleil à l'origine O et orientons l'axe (Ox) vers l'étoile. Dans R, la distance (propre) est $d = 4$ al (années-lumière).

   La durée du voyage dans R est l'intervalle de temps **impropre** Δt nécessaire pour parcourir la distance d à la vitesse v :

$$\Delta t = \frac{d}{v} \tag{20}$$

Les occupants mesurent une durée $\Delta t' = \Delta\tau$ pour le voyage ; c'est un intervalle de **temps propre**. D'après la dilatation des durées :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{d}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{21}$$

Nous fixons $\Delta\tau = 1$ jour. Pour trouver v, nous isolons les termes en $\beta = v/c$:

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{c\Delta\tau} \equiv A, \tag{22}$$

avec $d = 4 \times 365,2425$ jours-lumière et $\Delta\tau = 1$ jour, soit $A \approx 1461$. En résolvant pour β :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} \approx 0,999999766, \\ v &= 0,999999766\, c. \end{aligned} \tag{23}$$

Distance perçue : Dans le référentiel de la fusée, Alpha du Centaure s'approche à la vitesse $v \approx c$. Puisque le voyage dure $\Delta\tau = 1$ jour, la distance (contractée) L

parcourue est :

$$L = v \times \Delta\tau \approx 1 \text{ jour-lumière.} \tag{24}$$

C'est bien le résultat attendu par la **contraction des longueurs** : $L = d/\gamma$.

Contraction des longueurs

Voir (Smith, 1997, Chapitre 4).

- On mesure la longueur d'une tige en déterminant les coordonnées de ses extrémités. Si la tige est immobile, ces abscisses peuvent être mesurées à des instants arbitraires. On obtient ainsi la **longueur propre** de la tige, notée L_0.
- Dans un référentiel où la tige est en mouvement, il est impératif que les mesures des abscisses soient effectuées **au même instant**. Or, la simultanéité étant relative, la longueur L mesurée dépendra de la vitesse du référentiel d'observation.

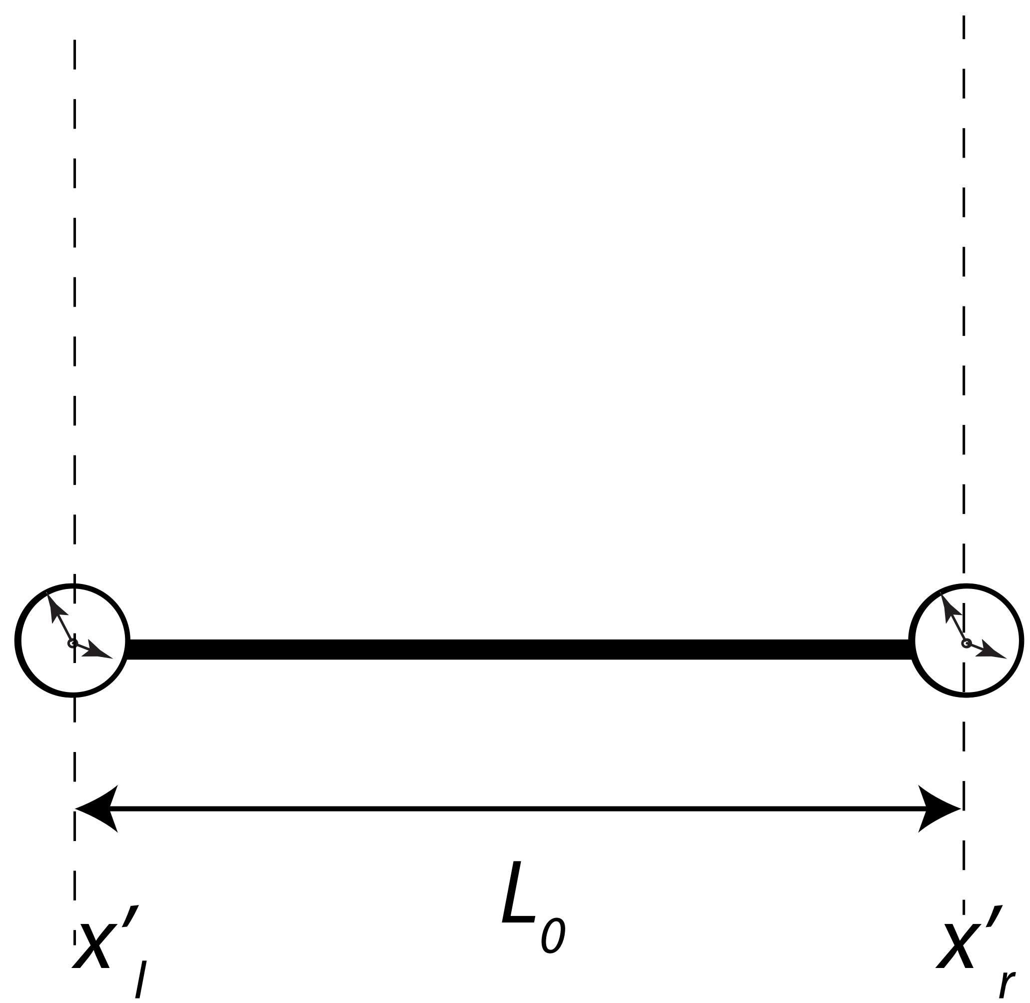

FIGURE 3 – contraction des longueurs

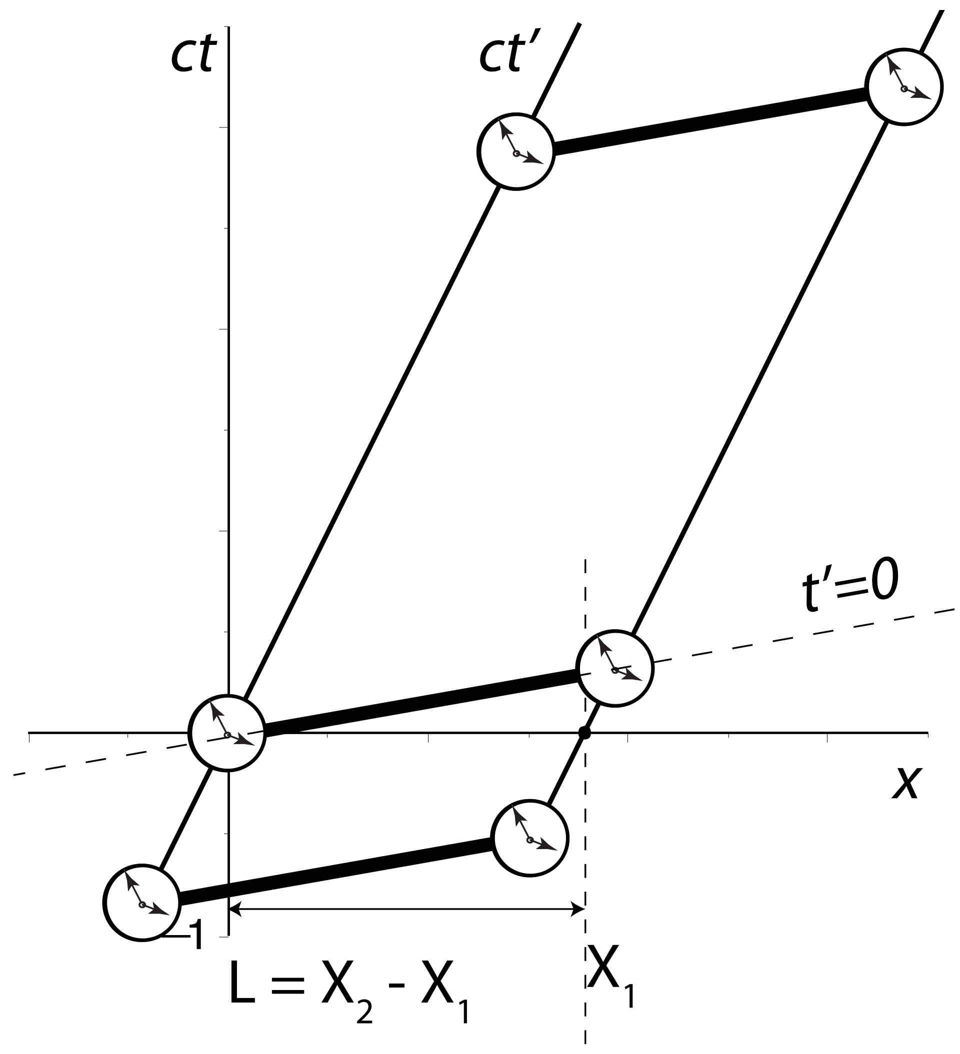

FIGURE 4 – contraction des longueurs

— **Démonstration via les transformations de Lorentz :** Considérons la transformation des coordonnées spatiales :

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1)$$
$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2)$$

La différence d'abscisses dans R' vérifie donc :

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma v(t_2 - t_1)$$

— Si la tige est au repos dans R', sa longueur propre est $L_0 = x'_2 - x'_1$. Pour un observateur dans R, la longueur L est la différence des abscisses mesurées **simultanément** ($t_1 = t_2$). La relation devient :

$$L_0 = \gamma L \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}}$$

— **Conclusion :** Comme $\gamma > 1$, la longueur propre est toujours supérieure à la longueur mesurée dans un référentiel en mouvement. C'est la **contraction des longueurs**.

— **Remarque conceptuelle :** Contrairement aux théories de Fitzgerald ou Lorentz, cette contraction est un phénomène **cinématique** (un effet de perspective dans l'espace-temps) et non dynamique. Aucune force n'agit sur l'objet ; il ne s'agit pas d'une illusion, mais de la nature même de la mesure spatiale.

- **Exemple du muon :** Dans son référentiel propre, le muon a une durée de vie très courte ($2,2\mu$s). S'il atteint le sol, c'est parce que de son point de vue, l'épaisseur de l'atmosphère terrestre est contractée par le facteur γ, devenant ainsi franchissable en un temps réduit.

Exercice d'application

1. **(Examen 2015)**

   Chaque voiture d'un TGV a une longueur propre $l_0 = 10$ m. Le train passe sous un tunnel de longueur propre $L_{tunnel} = 50$ m à une vitesse $v = 0,9949874371\, c$.

   Combien de voitures peuvent se trouver simultanément à l'intérieur du tunnel pour un observateur lié au tunnel ?

Solution de l'exercice

- **Calcul du facteur de Lorentz :** Pour la vitesse donnée, nous calculons γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 10$$

- **Contraction des longueurs :** Dans le référentiel du tunnel, les voitures sont en mouvement et subissent une contraction de leur longueur. La longueur l' d'une voiture mesurée depuis le tunnel est :

$$l' = \frac{l_0}{\gamma} = \frac{10 \text{ m}}{10} = 1 \text{ m} \tag{25}$$

- **Conclusion :** Le tunnel mesure 50 m dans ce référentiel. Puisque chaque voiture mesure désormais 1 m, il y a :

$$N = \frac{L_{tunnel}}{l'} = \frac{50 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 50 \text{ voitures}$$

50 voitures se trouvent donc simultanément dans le tunnel pour un observateur terrestre.

Un autre phénomène – l'énergie d'une particule relativite

— En physique newtonienne (c'est à dire, non-relativiste), l'énergie cinétique et quantité de mouvement d'une particule de masse m à cause de sa vitesse $\vec{v}$, de norme $v = \|\vec{v}\|$ sont égaux à

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2, \\ \vec{p} &= m\vec{v}. \end{aligned} \tag{26}$$

— En relativité restreinte, l'énergie et quantité de mouvement d'une particule de masse m et vitesse v est égale à

$$\begin{aligned} &\boxed{E = \gamma mc^2,} \\ &\boxed{\vec{p} = m\gamma\vec{v}.} \end{aligned} \tag{27}$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

— Remarque : en physique newtonienne il y a toujours un référentiel inértiel pour lequel $v = 0 = E$, au moins pour un instant.

— Exercice immédiat : en relativité restreinte il y a toujours un référentiel inértiel pour lequel $v = 0$, au moins pour un instant. Trouver le minimum de l'énergie d'une particule de masse m.

Exercice immédiat : solution

1. Il est évident, $v = 0$ donne le minimum de γ, et donc

$$E = mc^2. \tag{28}$$

   Elle s'appelle l'énergie de la masse au repos.

Exercice immédiat

1. Developpez le γ en série de Taylor (comme vous avez fait en TD 2, exercice 2(b)) et gardez juste les premiers deux termes. Interpréter les premiers deux termes.

Exercice immédiat : solution

1. Developpez le γ en série de Taylor (comme vous avez fait en TD 2, exercice 2(b)) et gardez juste les premiers deux termes. Interpréter les premiers deux termes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O(\beta^4) \end{aligned} \tag{29}$$

Et donc, en gardant les termes à l'ordre β^2,

$$\begin{aligned} E = \gamma m c^2 &= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right), \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \end{aligned} \tag{30}$$

il s'agit de la somme de l'énergie de la masse au repos + énergie cinétique newtonienne.

Références

Smith, J. H. (1997), *Introduction à la relativité*, InterEditions, Paris, France.