

L1 Physique : Relativité  
Licence 1 Parcours 1 et 3 année 2015-2016

Jacques Langlois, avec modifications par Rob Scott

16 mars 2021



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Relativité de Galilée et ondes mécaniques</b>	<b>3</b>
1.1	Notions de l'espace et du temps absolu . . . . .	3
1.2	Relativité de Galiléo . . . . .	4
1.3	Transformation de Galilée . . . . .	5
1.4	Onde plane . . . . .	6
1.5	L'effet Doppler . . . . .	9
1.6	Exercices . . . . .	13
<b>2</b>	<b>La lumière</b>	<b>15</b>
2.1	Réfraction de la lumière . . . . .	16
2.2	Transport d'énergie par une onde . . . . .	20
2.3	L'expérience de Young . . . . .	23
2.4	Ondes électromagnétiques . . . . .	26
2.5	L'interféromètre de Michelson . . . . .	26
2.6	L'expérience de Michelson et Morley . . . . .	28
2.7	Résultats et interprétation . . . . .	33
2.8	Exercices . . . . .	34
<b>3</b>	<b>La Relativité Restreinte</b>	<b>37</b>
3.1	Postulats de la relativité restreinte . . . . .	37
3.2	Invariance des longueurs perpendiculaires au mouvement relatif	39
3.3	La transformation de Lorentz . . . . .	40
3.4	Addition des vitesses . . . . .	43
3.5	Dilatation des durées . . . . .	45
3.6	Contraction des longueurs . . . . .	48
3.7	Transformation des vitesses . . . . .	49
<b>4</b>	<b>L'espace-temps</b>	<b>51</b>
4.1	Intervalle d'espace-temps . . . . .	51
4.2	Les quadri-vecteurs . . . . .	53
4.3	Le quadri-vecteur vitesse . . . . .	56

4.4	Le quadri-vecteur énergie-impulsion . . . . .	57
4.5	Le quadri-vecteur d'onde . . . . .	60
4.6	L'effet Doppler . . . . .	61
4.7	Particle de masse nulle . . . . .	67
4.8	Le photon . . . . .	67
4.9	Exercices . . . . .	68
<b>5</b>	<b>La Gravitation</b>	<b>71</b>
5.1	L'interaction gravitationnelle . . . . .	71
5.2	Principe d'équivalence . . . . .	71
5.3	Décalage vers le rouge gravitationnel . . . . .	71
5.4	Dilatation du temps . . . . .	71
5.5	Notion de trou noir . . . . .	71

# Introduction

Contactez moi avec vos questions :  
adresse mail : [robert.scott@univ-brest.fr](mailto:robert.scott@univ-brest.fr)

Relativité Restreinte :

- trouvé principalement par Albert Einstein en 1905, mais aussi par Henri Poincaré et Hendrik Lorentz.
- changé notre notion de l'espace et du temps
- les mathématiques sont simple.
- La physique est subtile. Un problème majeur est que nous avons intuitivement les notions qui ne sont pas correctes. Par exemple les notions du temps absolue.



# Chapitre 1

## Relativité de Galilée et ondes mécaniques

### 1.1 Notions de l'espace et du temps absolu

La notion d'espace c'est construite petit à petit. Pour Aristote l'espace absolu possède des lieux privilégiés. Pour Ptolémée le centre de la terre correspond au centre de l'univers. Après Copernic c'est le soleil qui est considéré comme le centre de l'univers.

Les postulats d'Euclide et la géométrie qui en découle semblaient traduire des évidences. Nous savons aujourd'hui que ce n'est pas la seule géométrie possible. [e.g. semi-riemannienne]. Mais qu'elle est commode pour exprimer les lois de la physique classique.

Newton a explicité la notion d'espace absolu dans le cadre de la physique classique. Pour lui, l'espace absolu sans relation avec les choses externes demeure toujours similaire et immobile. La force centrifuge se manifeste sans référence aux autres corps. Elle résulte de la rotation dans l'espace absolu. [Le seau de Newton]. Cette notion a été remise en question par Mach [et beaucoup d'autres, voir (Maudlin, 2012)] puis par Einstein.

La notion de temps se constitue petit à petit, chez l'individu comme dans l'histoire des sciences. La durée vécue dépend des circonstances mais pour que le temps devienne une notion scientifique il faut pouvoir mesurer objectivement les durées.

On pourrait envisager l'utilisation d'un mouvement rectiligne supposé uniforme pour mesurer une durée à partir de la distance parcourue. Pour vérifier l'uniformité du mouvement il faudrait une mesure indépendante du temps!

On utilise plutôt un phénomène périodique pour mesurer les durées. Le

pendule oscille de manière régulière mais le frottement le ralentit. La rotation de la terre sur elle-même est plus uniforme mais le développement des horloges atomiques a montré que ce mouvement n'est pas parfaitement périodique. En fait la notion de mouvement périodique est un concept limité : des horloges de plus en plus précises mettent en évidence les limitations des précédentes mais on n'a jamais la certitude d'avoir un phénomène parfaitement périodique.

[Maintenant nous mesurons le temps avec les *horloges atomiques*, qui sont très précises, e.g. un second dans 30 million d'années! [http://fr.wikipedia.org/wiki/Horloge\\_atomique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Horloge_atomique).]

Le concept de temps absolu et universel a été défini par Isaac Newton (1642–1727) : le temps absolu vrai et mathématique coule sans relation à rien d'extérieur uniformément et s'appelle durée.

### 1.1.1 Bibliographie

- Pour savoir plus sur la théorie d'espace et du temps absolu, lire (Maudlin, 2012) : *Philosophy of physics : space and time*.
- Pour savoir plus sur l'histoire de la physique d'espace et du temps, lire (Lachièze-Rey, 2008, Partie I) : *Au-delà de l'espace et du temps : La nouvelle physique*.

## 1.2 Relativité de Galiléo

L'idée de relativité remonte à Galilée (1564–1642).

*Selon ce principe toutes les lois de la mécanique sont les mêmes pour deux observateurs inertiels se déplaçant avec une vitesse relative constante.*

Au début du 17<sup>e</sup> siècle il était généralement admis que la terre occupait le centre de l'univers. Sous l'action de la gravité les objets étaient réputés se diriger vers le centre de la terre et donc de l'univers. Ce point avait donc un rôle très particulier. Pour appuyer ce point de vue on disait qu'un déplacement de la terre au-tour du soleil à la vitesse de 30 km/s ne passerait pas inaperçu. C'est ainsi qu'était combattue l'hypothèse héliocentrique.

Galilée remarqua que les papillons et les mouches volent de la même manière dans un bateau immobile dans un port ou dans un bateau se déplaçant à vitesse constante. Le mouvement du bateau n'est donc pas décelable par l'observation des papillons ou des mouches. Il en déduisit que le mouvement de la terre ne serait pas détectable par des expériences réalisées sur celle-ci.

*De manière plus précise on peut dire qu'aucune expérience de mécanique ne peut mettre en évidence un mouvement uniforme.*

### 1.3 Transformation de Galilée

Un repère est défini par la donnée d'une origine et d'un système d'axes qui peuvent être mutuellement perpendiculaire pour des raisons de commodité. Nous supposons que les coordonnées cartésiennes seront utilisés par tous les observateurs.

On considère deux observateurs se déplaçant avec une vitesse relative  $V$  constante. Les repères  $R$  et  $R'$  définis par ces observateurs sont tels que leur origines  $O$  et  $O'$  coïncident à l'instante  $t = 0$ . Les axes correspondants sont parallèles et les axes  $Ox$  et  $O'x'$  sont dans la direction du mouvement relatif ; voir Fig. 1.1. [Nous disons « configuration standard ».] Le temps est le même pour les deux observateurs, c'est le temps absolu universel.

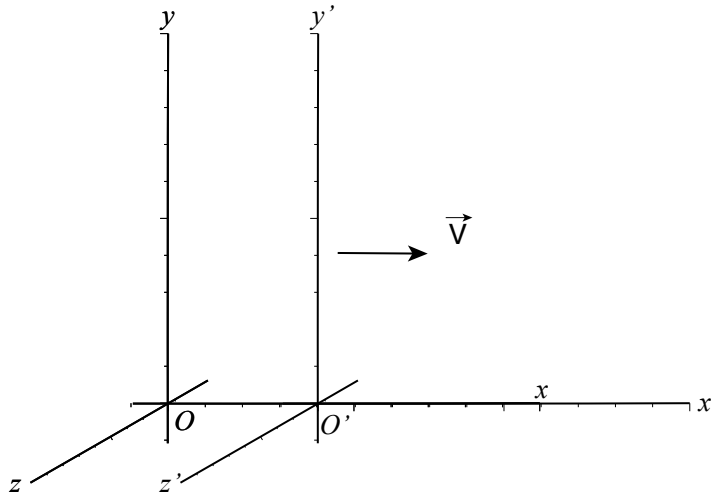


FIGURE 1.1 – Configuration standard :  $O'$  avec ses 3 axes s'éloigne de l'origine  $O$  avec vitesse  $\vec{V} = \text{constante}$ . L'axes des  $x$  et  $x'$  sont parallèles. Similairement, les axes des  $y$  et  $y'$  sont parallèles, et des  $z$  et  $z'$  sont parallèles.

La relation entre les coordonnées cartésiennes d'un même point repéré dans  $R$  et  $R'$  définit la transformation de Galilée :

$$\begin{aligned}x &= x' + Vt \\y &= y' \\z &= z'\end{aligned}$$

En dérivant ces relations par rapport au temps on obtient la transforma-

## 6 CHAPITRE 1. RELATIVITÉ DE GALILÉE ET ONDES MÉCANIQUES

tion des vitesses :

$$\begin{aligned}v_x &= v'_{x'} + V \\v_y &= v'_{y'} \\v_z &= v'_{z'}\end{aligned}$$

En dérivant encore une fois par rapport au temps on montre que *l'accélération est invariante*. Si la relation fondamentale de la dynamique est vraie dans le repère  $R$  on a :

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Dans le repère  $R'$  l'accélération est la même :

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

La masse qui représente une quantité de matière peut être raisonnablement supposée invariante. [Dans la relativité restreinte ça changera.] Pour que la loi de Newton soit vraie dans le repère  $R'$  il faut que la force soit invariante. C'est le cas si la force ne dépend que de la distance entre deux points.

Considérons les deux points repérés par les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  dans  $R$  et les abscisses  $x'_1$  et  $x'_2$  dans  $R'$ . La transformation de Galilée permet d'écrire :

$$\begin{aligned}x_1 &= x'_1 + V t \\x_2 &= x'_2 + V t\end{aligned}\tag{1.1}$$

Par soustraction on trouve

$$x_1 - x_2 = x'_1 - x'_2$$

ce qui montre que *la transformation de Galilée laisse les distances invariantes*.

### 1.4 Onde plane

Une onde est une oscillation qui se déplace de proche en proche. C'est un phénomène qui manifeste une double périodicité : une périodicité temporelle en un point et une périodicité spatiale à un instant donné.

Il existe différentes fonctions qui peuvent décrire un tel phénomène. Prenons par exemple la fonction :

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

À un instant donnée ( $t = 0$  par exemple ) on a :

$$\psi(x, 0) = A \cos(kx)$$

Cette fonction présente évidemment une périodicité spatiale. En un point donné ( $x = 0$  par exemple) on a :

$$\psi(0, t) = A \cos(-\omega t)$$

C'est une fonction périodique du temps.

La périodicité spatiale implique qu'il existe certaines valeurs  $\delta x$  telles que à tout instant :

$$\psi(x + \delta x, t) = \psi(x, t).$$

La plus courte distance vérifiant cette condition est par définition la longueur d'onde  $\lambda$ . Elle doit donc satisfaire la condition :

$$\psi(x + \lambda, t) = \psi(x, t).$$

soit

$$\cos(k(x + \lambda) - \omega t) = \cos(kx - \omega t)$$

ou

$$\cos(kx + \lambda k - \omega t) = \cos(kx - \omega t)$$

Cette égalité est vérifiée si la différence de phase [l'argument du cosinus] est égale à  $2\pi$ . On en déduit :

$$k\lambda = 2\pi$$

ou

$$\lambda = 2\pi/k$$

Le paramètre  $k$ , homogène à l'inverse d'une longueur, est appelé *vecteur d'onde*. Dans un problème à une dimension le caractère vectoriel n'est pas mis en évidence. [Nous le voyons dans chapitre 3.]

La périodicité temporelle implique qu'il existe certaines valeurs  $\delta t$  telles que

$$\psi(x, t + \delta t) = \psi(x, t).$$

La plus petite valeur de  $\delta t$  vérifiant cette condition est par définition la période  $\tau$  d'onde. Elle doit donc vérifier la condition :

$$\cos(kx - \omega t - \omega\tau) = \cos(kx - \omega t)$$

Cette condition est vérifiée si

$$\omega\tau = 2\pi$$

## 8CHAPITRE 1. RELATIVITÉ DE GALILÉE ET ONDES MÉCANIQUES

La période est donc :

$$\tau = 2\pi/\omega$$

où  $\omega$  est la *pulsation d'onde* ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ). La *fréquence*  $\nu$  est définie par

$$\nu = 1/\tau \quad (\text{Hz})$$

Elle est donc liée à la pulsation par la condition

$$\nu = \omega/2\pi$$

L'argument du cosinus

$$\phi = kx - \omega t$$

est la *phase d'onde*. La surface d'onde est le lieu des points pour lesquels la phase est constante à un instant donné. Ici la surface d'onde correspond à  $x = \text{constante}$ , c'est à dire à un plan perpendiculaire à l'axe des  $x$ . Pour cette raison on dit que la fonction représente une onde plane. Le coefficient  $A$  est l'amplitude de l'onde. Sa dimension dépend de la quantité associée à l'onde : pression, déplacement, densité, champs électrique ...

Lorsque la fonction  $\psi(x, t)$  prend sa valeur maximale on dit que l'onde présente une crête. Cette crête se déplace au cours du temps. Un observateur qui voudrait la suivre devrait donc se déplacer à une vitesse  $c$  qui est par définition la *vitesse de phase de l'onde*.

On peut deviner que la vitesse de phase est égale à la longueur d'onde fois le nombre d'oscillations par unité du temps, c'est-à-dire

$$c = \lambda\nu$$

La condition à satisfaire est que la phase ne change pas. Il faut donc avoir : [la différentielle de la phase ...]

$$\Delta(kx - \omega t) = k\Delta x - \omega\Delta t = 0$$

soit

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

La vitesse de phase est donc

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{k} = \lambda\nu.$$

**Flash spécial** : La vitesse de phase de la lumière est toujours  $c = 3 \times 10^8$  m/s, n'est pas ? En fait, ça n'applique strictement que pour les ondes planes. Je viens de lire que la vitesse de phase de la lumière peut est modifier un petit peu pour les ondes non-planes ! Voir la revue, numéro de janvier, <http://physicsworld.com/>

La propagation de l'onde est perpendiculaire à la surface d'onde. Elle est ici dans le sens positif de l'axe des  $x$ . La fonction [remarquer le “+” avant  $\omega$ ]

$$\psi(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$$

représente une onde plane de même longueur d'onde et de même période (ou fréquence) que celle étudiée. La vitesse de phase s'obtient à partir de la condition :

$$\Delta(kx + \omega t) = k\Delta x + \omega\Delta t = 0$$

soit

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\omega}{k}$$

La vitesse de phase est donc

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\omega}{k} = -\lambda\nu$$

Elle représente donc une onde qui se déplace dans le sens négatif de l'axe des  $x$ .

Nous étudions ici l'aspect cinématique de la propagation d'une onde plane. Nous verrons plus loin qu'un transport d'énergie peut lui être associé.

## 1.5 L'effet Doppler

La source détermine l'amplitude et la fréquence de l'onde. La vitesse de phase est déterminée par le milieu qui assure la propagation. Cette caractéristique échappe complètement à la source.

TABLE 1.1 – Paramètres de la fonction d'onde pour une source ponctuelle

Symbole	Nom	Unité	déterminé par
$A$	amplitude	Pa, m, etc.	la source
$\omega$	pulsation	longueur <sup>-1</sup>	la source
$c$	vitesse de phase	longueur · durée <sup>-1</sup>	le milieu
$k$	vecteur d'onde	longueur <sup>-1</sup>	$k = \omega/c$

On appelle *effet Doppler* le changement de fréquence dû au mouvement de la source ou de l'observateur. La vitesse de la source ou de l'observateur se mesure par rapport au milieu qui assure la propagation de l'onde.

Nous considérerons le cas d'une onde à la surface de l'eau mais la même analyse peut s'appliquer à une onde acoustique dans l'air, à une onde sismique, à une corde ou une membrane vibrante. Le milieu matériel qui assure la propagation de l'onde joue le rôle de repère au repos absolu.

La fréquence mesurée dans le repère de la source est appelée fréquence propre. Pour déterminer la fréquence mesurée par un observateur il faut distinguer les cas où (i) la source est au repos et l'observateur en mouvement, et (ii) celui où la source se déplace alors que l'observateur est immobile. Dans tous les cas la vitesse de phase est le produit de la longueur d'onde par la fréquence.

### 1.5.1 Source immobile et observateur en mouvement

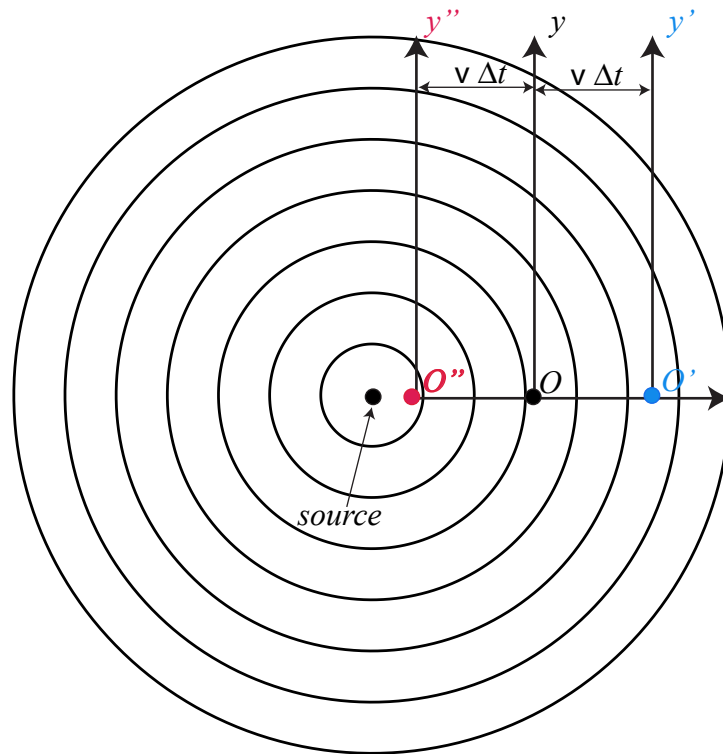


FIGURE 1.2 – L'effet Doppler :  $O$  est stationnaire par rapport à la source.  $O'$  s'éloigne de la source avec vitesse  $v$ .  $O''$  s'approche à la source avec vitesse  $v$ . Les cercles sont les lignes de phase  $\phi = \text{constante}$ , par exemple, les crêtes.

L'observateur  $O$  et la source  $S$  sont immobiles alors que  $O'$  s'éloigne de la source à la vitesse  $v$  tandis que  $O''$  s'en approche à la même vitesse. La

source produit des ondes circulaires à la surface de l'eau à un rythme régulier. L'intervalle de temps entre la production de deux crêtes consécutives est la période de l'onde, la distance entre deux crêtes consécutives est la longueur d'onde. Le nombre de crêtes passant en un point par unité de temps est la fréquence.

A l'instant  $t = 0$ ,  $O, O'$  et  $O''$  coïcident. Durant un intervalle  $\Delta t$  les nombres de crêtes atteignant  $O, O'$  et  $O''$  sont respectivement  $\Delta N, \Delta N'$  et  $\Delta N''$ . Les fréquences correspondantes sont :

$$\nu = \frac{\Delta N}{\Delta t}, \quad \nu' = \frac{\Delta N'}{\Delta t}, \quad \nu'' = \frac{\Delta N''}{\Delta t}$$

Durant l'intervalle  $\Delta t$  la distance  $OO'$  devient  $v\Delta t$ . Les crêtes qui se trouvent entre  $O$  et  $O'$  ont été observées par  $O$  mais pas par  $O'$ . Leur nombre est  $v\Delta t/\lambda$ . On a donc :

$$\Delta N' = \Delta N - \frac{v\Delta t}{\lambda}$$

ou

$$\frac{\Delta N'}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} - \frac{v}{\lambda}$$

soit

$$\nu' = \nu - \frac{v}{\lambda} = \nu - \frac{v\nu}{\lambda\nu} = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right). \quad (1.2)$$

On suppose que la vitesse de l'observateur est inférieure à celle de l'onde. Dans le cas contraire aucune crête n'atteindrait pas  $O'$  (même si  $O'$  pourrait atteindre d'autres crêtes).

Les crêtes se trouvant entre  $O''$  et  $O$  ont été prises en compte par le premier mais pas par le second. On a donc :

$$\Delta N'' = \Delta N + \frac{v\Delta t}{\lambda}$$

ou

$$\frac{\Delta N''}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} + \frac{v}{\lambda}$$

soit

$$\nu'' = \nu + \frac{v}{\lambda} = \nu + \frac{v\nu}{\lambda\nu} = \nu \left(1 + \frac{v}{c}\right). \quad (1.3)$$

La longueur d'onde étant la même pour tous les observateurs [pourquoi?] on a :

$$c' = \lambda\nu' = \lambda\nu(1 - v/c) = c - v \quad (1.4)$$

$$c'' = \lambda\nu'' = \lambda\nu(1 + v/c) = c + v \quad (1.5)$$

Ces expressions correspondent à la transformation de Galilée des vitesses.

[Pouvez-vous penser à une autre façon, très simple et direct, de trouver les équations (1.4) et (1.5) ci-dessus ? Indice : penser à la transformation de Galilée des vitesses et des longueurs.]

### 1.5.2 Source en mouvement et observateur au repos

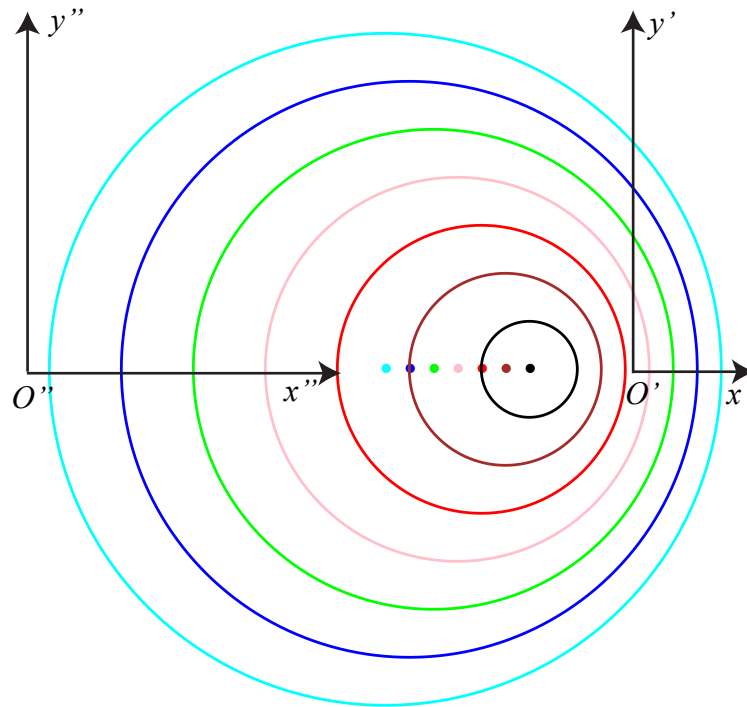


FIGURE 1.3 – L'effet Doppler :  $O'$  et  $O''$  sont stationnaires par rapport au milieu matériel. Mais la source s'approche à  $O'$  avec vitesse  $v$ . La source s'éloigne de  $O''$  avec vitesse  $v$ . La source initialement était au point cyan quand elle a émis la crête qui est maintenant le grand cercle cyan. Plus récemment la source était au point noir quand elle a émis la crête qui est maintenant le petit cercle noir.

Les observateurs  $O'$  et  $O''$  étant au repos par rapport au milieu matériel ils mesurent la vitesse  $c$  pour l'onde :

$$\lambda'v' = \lambda''v'' = c$$

Durant une période  $T$  la source se déplace vers la droite par une distance  $vT$ . Les ondes circulaires ont ces points comme centres. La distance  $\lambda'$

entre deux crêtes successives atteignant  $O'$  est inférieure à la longueur d'onde produite par un source immobile de même fréquence. On a :

$$\lambda' = \lambda - vT.$$

On peut écrire :

$$\lambda' = \lambda - \frac{v}{\nu} = \lambda - \frac{v\lambda}{\nu\lambda}$$

soit

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

La distance  $\lambda''$  entre deux crêtes successives atteignant  $O''$  est supérieure à la  $\lambda$  (longueur d'onde produite par un source immobile de même fréquence) car la seconde crête a été produite plus loin. On a :

$$\lambda'' = \lambda + vT = \lambda + \frac{v\lambda}{\nu\lambda} = \lambda + \frac{v\lambda}{c}$$

soit

$$\lambda'' = \lambda \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

La fréquence étant inversement proportionnelle à la longueur d'onde ( $\lambda\nu' = c$ ) on a :

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \frac{v}{c}},$$

et

$$\nu'' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Dans tous les cas la fréquence augmente lorsque la source et l'observateur se rapprochent et elle diminue lorsqu'ils s'éloignent. Cependant, le décalage de fréquence n'est pas le même selon que c'est la source ou l'observateur qui se déplace par rapport au milieu dans lequel l'onde se propage.

Si la vitesse de la source est petite par rapport à celle de l'onde on peut écrire :

$$\frac{1}{1 + v/c} \approx 1 - \frac{v}{c}$$

et

$$\frac{1}{1 - v/c} \approx 1 + \frac{v}{c}.$$

Dans ce cas le mouvement de la source produit le même décalage que celui de l'observateur.

## 1.6 Exercices



# Chapitre 2

## La lumière

C'est l'astronome danois Rømer (1644–1710) travaillant à l'observatoire de Paris qui a établi le fait que la lumière ne se propage pas instantanément d'un point à un autre. En observant l'apparition périodique d'un satellite de Jupiter (Io) il a pu estimer la vitesse de la lumière en 1675.

La terre se trouve à environ  $150 \times 10^6$  km du soleil alors que le rayon de l'orbite de Jupiter est de  $782 \times 10^6$  km soit environ 5 fois celui de l'orbite terrestre. D'après une loi de Kepler (1571–1630) la période de rotation d'une planète autour du soleil est proportionnelle au rayon à la puissance  $3/2$ . Elle est donc d'environ 12 ans pour Jupiter. Le satellite Io a une période d'environ 42 heures.

En 6 mois Jupiter se déplace d'environ  $15^\circ$  par rapport au soleil. Pendant ce temps la terre fait une demi-révolution autour du soleil. Sur la Fig. 2.1 on montre les positions des planètes à un instant (1), [quand la terre s'approche à Jupiter]. Sur la Fig. 2.2 on montre les positions six mois plus tard (2) [quand la terre s'éloigne de Jupiter]. En négligeant le déplacement de Jupiter [on peut penser de l'orbite de Io comme une source de un signal periodique, de periode  $\tau \approx 42\text{h}$  mesuré dans un repère au repos par du soleil.] Quand la terre se trouve à (1), nous somme des observateur qui s'approche, avec vitesse  $v$ , la source périodique, et donc la fréquence observée est (rappelez-vous Eq. (1.2)) :

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

En revanche, quand la terre se trouve à (2), nous somme des observateur qui s'éloigne, avec vitesse  $v$ , de la source périodique, et donc la fréquence observée est (rappelez-vous Eq. (1.3)) :

$$\nu'' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

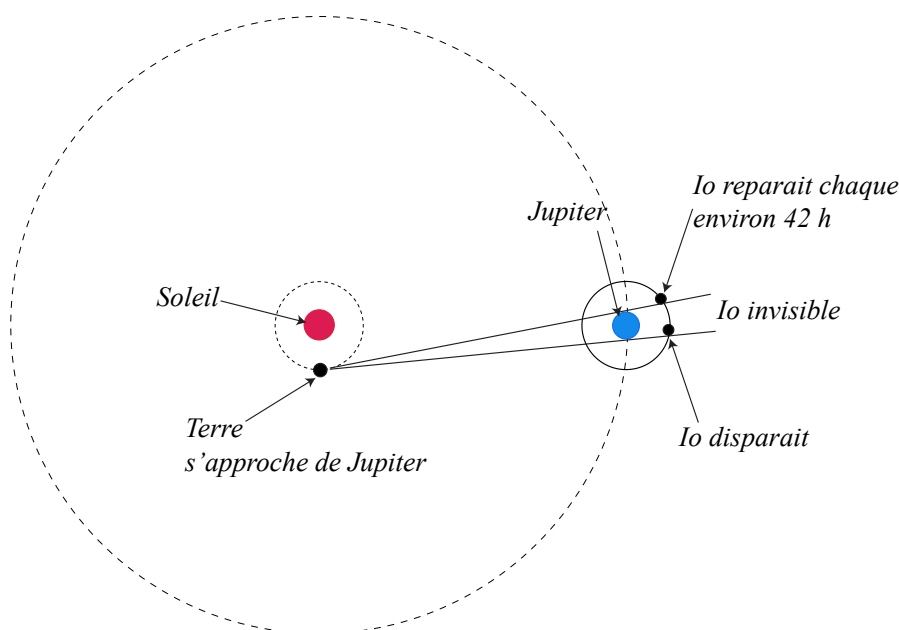


FIGURE 2.1 – Un signal périodique : Le petit satellite de Jupiter *Io* a une période orbitale environ 42 h. Il disparaît derrière Jupiter et reparait après sur l'autre coté de Jupiter permettant Rømer de mesurer la période précisément par l'intervalle du temps entre les réapparitions. C'est un signal lumineux périodique. La Terre s'approche de la source dans le diagramme ci-dessus. Mais 6 mois après la Terre s'éloigne de la source.

Utilisons le fait que  $v = 30$  km/s, et les observation de  $\nu'$  et  $\nu''$  donnent la vitesse  $c$ .

Rømer a remarqué que l'apparition (comme la disparition) du satellite se faisait avec un certain retard lorsque la terre s'éloigne de Jupiter et avec une certaine avance lorsqu'elle s'en approche. Il a estimé la vitesse de la lumière à 225000 km/s soit environ 75% de la valeur actuelle. Le point important est que cette observation a établi définitivement que la lumière se déplace avec une vitesse finie.

N.B. Les satellites de Jupiter avaient été observés par Galilée et leur observation était motivée par les besoins de la navigation en mer.

## 2.1 Réfraction de la lumière

La vitesse de la lumière dans le vide, telle qu'estimée par Rømer, était de loin la plus grande vitesse observée mais la question de savoir si cette

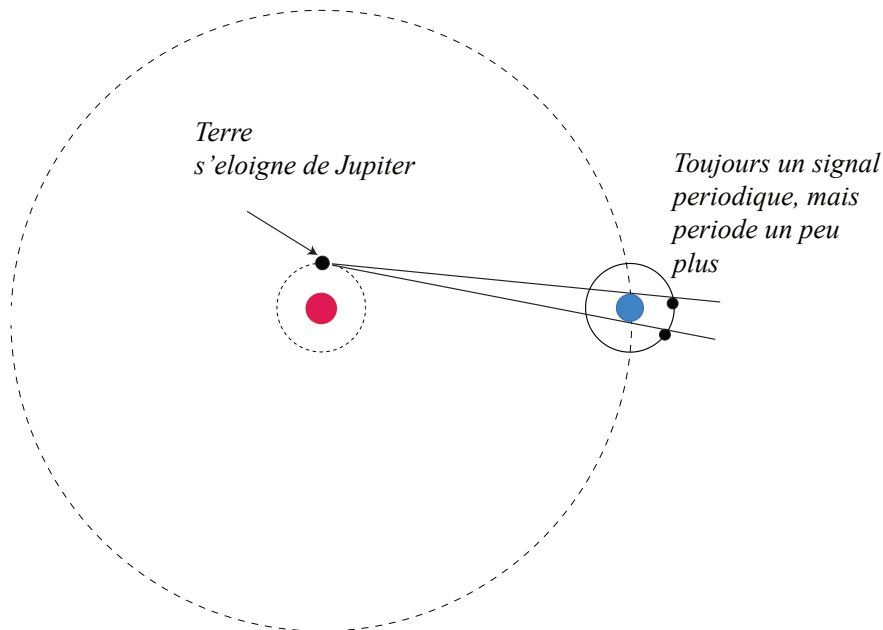


FIGURE 2.2 – Six mois après, il y a toujours un signal périodique. Mais maintenant la Terre s'éloigne de la source, ce qui mène à la période un peu plus dû à l'effet Doppler dû au mouvement de la Terre.

vitesse constituait une limite supérieure à toute vitesse ou non n'était pas tranchée pour autant. Un élément de réponse dépend du modèle adopté pour la lumière. Jusqu'au 19<sup>e</sup> siècle deux modèles concurrents étaient proposés : le modèle corpusculaire et le modèle ondulatoire. Comme nous le verrons l'interprétation du phénomène réfraction de la lumière conduit à des conclusions opposées pour le rapport de la vitesse de la lumière dans deux milieux transparents.

Lorsqu'un rayon lumineux passe de l'air à l'eau il se rapproche de la normale à l'interface et lorsqu'il passe de l'eau à l'air il s'en éloigne. Le phénomène de profondeur apparente d'un objet immergé est une manifestation directe de ce comportement. La position apparente d'un objet immergé se trouve dans le prolongement des rayons émergents. Le fait que les rayons s'éloignent de la normale donne l'impression que la profondeur de l'objet est inférieure à sa profondeur réelle.

[conditions de réflexion totale = « total internal reflection »]

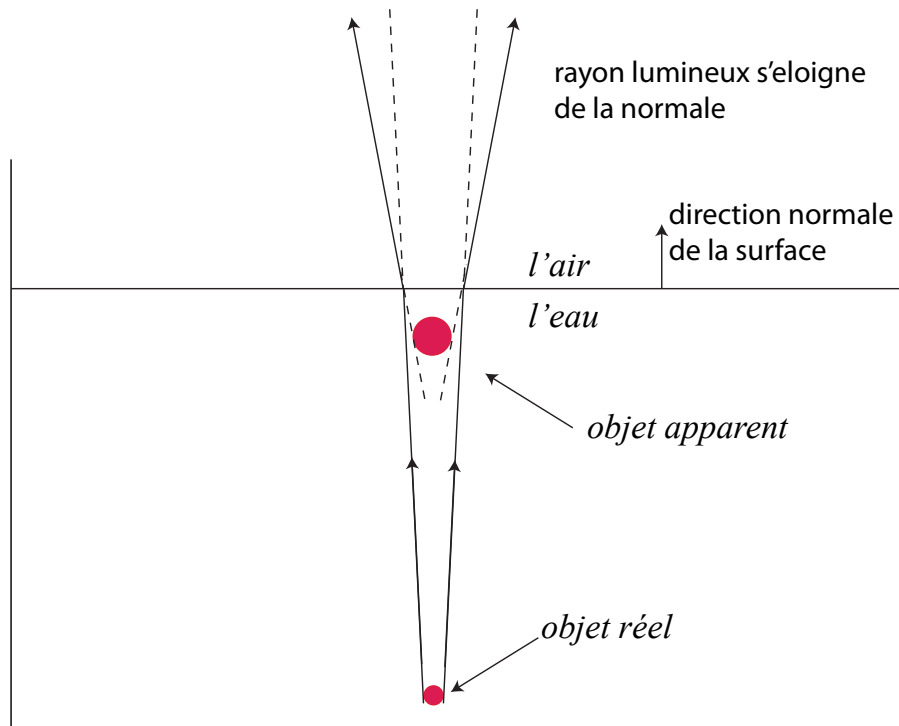


FIGURE 2.3 – Les objets dans l’eau apparent plus grand dû à la réfraction de la lumière. La profondeur apparente de l’objet est inférieure à sa profondeur réelle.

### 2.1.1 Le modèle corpusculaire

Dans le modèle corpusculaire un rayon lumineux représente un faisceau de particules légères se déplaçant à grande vitesse. Ce modèle qui s’inspire de la mécanique de Newton a été développé surtout par Clairaut et Michell [Alexis Clairaut (1713–1765), et John Michell (1724–1793)].

La composante de la vitesse parallèle à l’interface ne subit aucun changement. Le fait que le rayon se rapproche de la normale dans le milieu le plus dense implique que la composante de la vitesse perpendiculaire à l’interface est plus grande dans ce milieu. La vitesse de la lumière dans le vide ne représente donc pas une limite insurpassable [dans ce modèle! En fait, elle *est* une limite dans la théorie de la relativité restreinte, le modèle nous croyons aujourd’hui].

Fig. 18

Pour justifier ce comportement on supposait que les corpuscules de lumière sont davantage attirés par un milieu dense qui contient plus de matière.

### 2.1.2 Le modèle ondulatoire

Le principe de Huyghens permet de décrire la propagation d'une onde. D'après ce principe chaque point de la surface d'onde  $\Sigma$  au temps  $t$  peut être considéré comme une source d'ondelettes et la surface d'onde  $\Sigma'$  au temps  $t' > t$  est l'enveloppe de ces ondelettes. Dans un milieu homogène où la vitesse de propagation est indépendante de la position la surface d'onde n'est pas déformée, voir Fig. 2.4; image tiré de [http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe\\_de\\_Huygens-Fresnel](http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_Huygens-Fresnel).

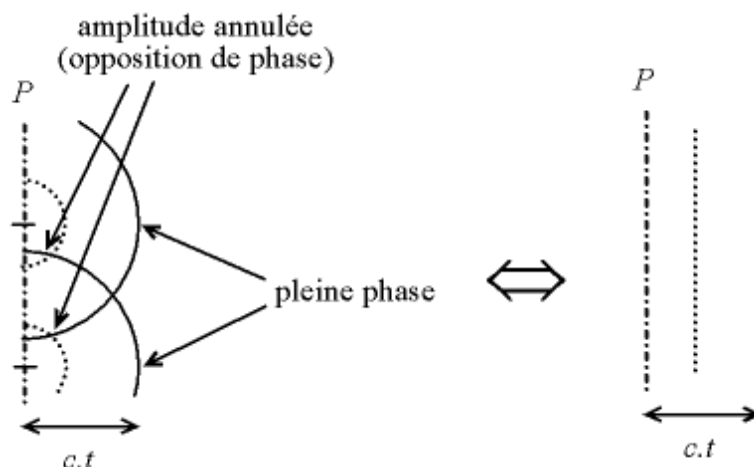


FIGURE 2.4 – Une onde plane. Chaque point de la surface d'onde est comme une source. Dans un milieu homogène la surface reste plane.

Mais si la vitesse dépend de la position la surface d'onde est déformée. Comparez les deux images dans Fig. 2.5.

Les rayons qui indiquent la direction de propagation de la lumière sont perpendiculaires aux surfaces d'onde. Si les rayons changent de direction à l'interface entre deux milieux transparents il en est de même des surfaces d'onde.

La distance entre deux crêtes est  $\lambda$  dans l'air et  $\lambda'$  dans l'eau. Si les rayons se rapprochent de la normale la longueur d'onde  $\lambda'$  est plus petite. La distance parcourue durant une période est donc plus petite dans l'eau. La vitesse de

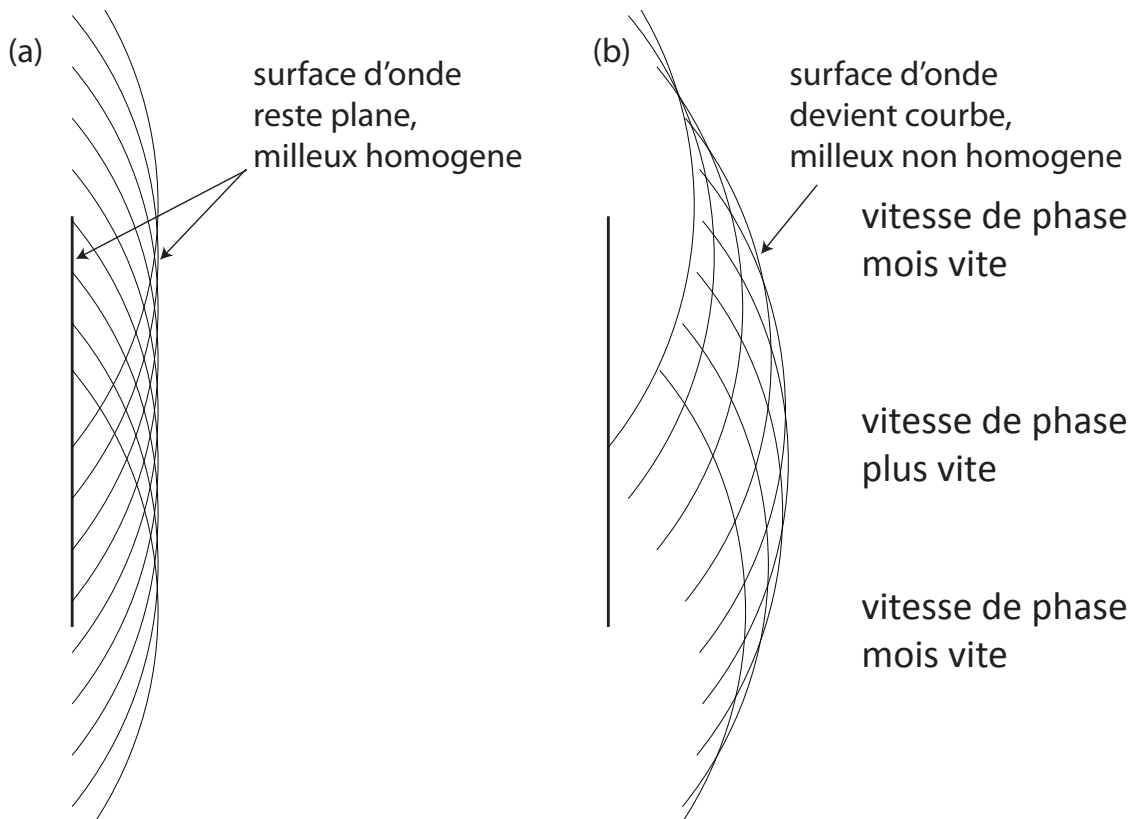


FIGURE 2.5 – (a) Dans un milieu homogène une onde plane reste plane, (b) milieu non homogène la surface d'onde devient courbe.

propagation est donc inférieure dans le milieu plus dense. Voir Fig. 2.6 ; image tiré de [http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe\\_de\\_Huygens-Fresnel](http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_Huygens-Fresnel).

## 2.2 Transport d'énergie par une onde

À la propagation d'une onde est associé un transport d'énergie. L'énergie transportée par unité de surface et par unité de temps (ou la puissance par unité de surface) est proportionnelle au carré de l'amplitude. Très souvent, et en particulier dans le cas de la lumière, l'oscillation est trop rapide pour que le mouvement puisse être suivi par un appareil détecteur. [La lumière visible est entre 400 nm pour la violette et 700 nm pour le rouge.] On enregistre

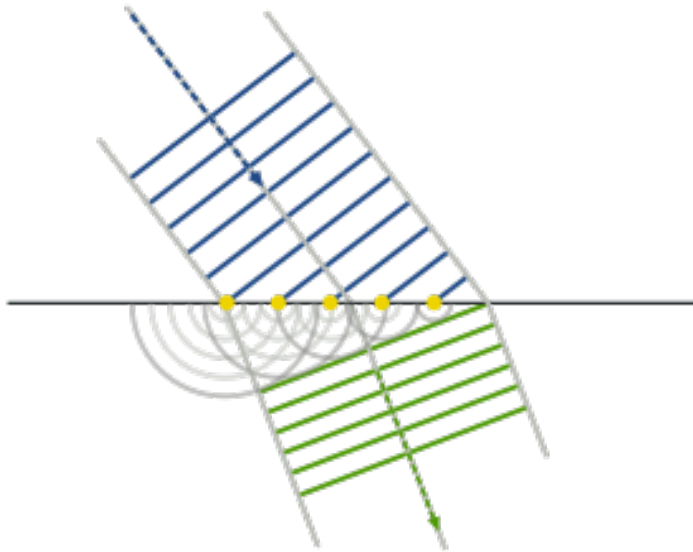


FIGURE 2.6 – Réfraction d'une onde plane passant d'un milieu avec vitesse de phase plus grande à un milieu avec vitesse plus lente. La longueur d'onde devient plus courte.

alors la valeur moyenne du carré de l'oscillation. Dans le cas de la lumière on appelle éclairement  $\epsilon$  la puissance moyenne par unité de surface :

$$\epsilon = \langle \psi^2(x, t) \rangle = A^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle$$

La valeur moyenne d'une fonction sur une durée  $T$  est,

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \cos^2 \omega t &= \frac{1}{4} (\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t))^2 \\ &= \frac{1}{4} (\exp(2i\omega t) + \exp(-2i\omega t) + 2) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

On en déduit :

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{T} \frac{1}{2} \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \Big|_0^T.$$

Puisque  $\omega T = 2\pi$  le dernier terme est nul. On obtient finalement :

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}.$$

On en déduit également :

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}.$$

La valeur moyenne d'un produit  $\sin \omega t$  par  $\cos \omega t$  est :

$$\begin{aligned} \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

La valeur moyenne d'un produit de deux cosinus déphasés est calculable à partir de ce qui précède :

$$\cos \omega t \cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi)$$

et donc

$$\langle \cos \omega t \cos(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{2} \cos \phi. \tag{2.3}$$

Dans les cas particuliers  $\phi = 0$  et  $\phi = -\pi/2$  on retrouve les résultats précédents.

Une source ponctuelle produit une onde sphérique (à trois dimensions). La forme de la fonction d'onde est ,

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t)$$

La phase est constante à un instant donné si  $r = \text{constante}$ . La surface d'onde est donc une sphère. L'onde est sortante car pour suivre une crête il faut que  $r$  augmente avec le temps.

La puissance transportée par unité de surface est :

$$\langle \psi^2(r, t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{A^2}{r^2}$$

La surface d'une sphère étant  $4\pi r^2$  la puissance transportée est indépendante de la distance à la source. Elle se répand sur une surface de plus en plus grande. L'éclairement est inversement proportionnel au carré de la distance. Cette loi traduit la conservation de l'énergie.

## 2.3 L'expérience de Young

Une mesure directe de la vitesse de la lumière dans l'air et dans l'eau aurait pu apporter un appui à l'un ou l'autre modèle. Bien avant que Fizeau [Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819 – 1896)] parvienne à réaliser ces mesures d'autres expériences avaient mis en évidence le caractère ondulatoire de la lumière ; dont celle de Young en 1802 [Thomas Young 1773 – 1829]. Cette expérience a mise en évidence l'interférence de la lumière provenant de deux sources synchrones. Nous allons analyser cette expérience.

Une caractéristique essentielle des phénomènes ondulatoires réside dans le principe de superposition. Lorsque deux sources produisent des perturbations, la vibration totale reçue en un point est la somme des vibrations produites par les sources à des instants antérieurs.

La fréquence de la lumière dans le spectre visible est de l'ordre de  $10^{15}$  Hz. Aucun détecteur ne peut suivre un mouvement aussi rapide. Par ailleurs la puissance reçue en un point est proportionnelle au carré de l'amplitude. C'est donc la valeur moyenne du carré de la vibration reçue qui est enregistrée.

A cause de la fréquence très élevée de la lumière visible il est très difficile de réaliser deux sources synchrones. Young y a apporté une solution imaginieuse à ce problème.

La lumière produite par une source  $S$  [monochrome] rencontre un écran percé de deux fentes séparées d'une distance  $d$ . D'après le principe de Huyghens les parties de la surface d'onde qui arrivent au niveau des fentes peuvent être considérées comme des sources d'ondelettes qui vont se propager jusqu'au détecteur en  $P$ .

Fig. 24

Les fentes peuvent donc être considérées comme des sources ponctuelles synchrones, c'est à dire en phase et de même fréquence. La vibration reçue au point  $P$  à l'instant  $t$  est la somme des vibrations produites au niveau de la fente au temps  $t - r_1/c$  et au niveau de la fente 2 au temps  $t - r_2/c$  :

$$\psi_p(t) = \frac{A_1}{r_1} \cos \omega(t - r_1/c) + \frac{A_2}{r_2} \cos \omega(t - r_2/c)$$

Par symétrie on peut supposer que les deux sources ont la même intensité ce qui permet d'écrire  $A_1 = A_2$ . Elles ne se trouvent pas à la même distance mais la différence entre  $r_1$  et  $r_2$  ne peut pas dépasser  $d$  :

$$|r_1 - r_2| \leq d.$$

En fait la différence de marche  $r_2 - r_1$  dépend de la direction d'observation. Dans la suite nous supposons que le point  $p$  est loin des fentes c'est à dire :

$$r_1 \gg d, \quad \text{et} \quad r_2 \gg d$$

Dans ce cas les amplitudes provenant des deux sources sont égales à une bonne approximation et on peut écrire :

$$\frac{A_1}{r_1} = \frac{A_2}{r_2} = \frac{A}{r}$$

où  $r$  est la distance mesurée à partir du point situé à mi-chemin entre les deux fentes.

La vibration reçue en  $P$  peut donc s'écrire :

$$\psi_p(t) = \frac{A}{r} [\cos \omega(t - r_1/c) + \cos \omega(t - r_2/c)]$$

La différence de marche ( $r_2 - r_1$ ) joue un rôle important car elle est responsable de la différence de phase entre les deux vibrations reçues en un point.

La puissance reçue en un point  $P$  est proportionnelle à :

$$\langle \psi_p^2(t) \rangle = \left( \frac{A}{r} \right)^2 \langle [\cos \omega(t - r_1/c) + \cos \omega(t - r_2/c)]^2 \rangle \quad (2.4)$$

$$= \left( \frac{A}{r} \right)^2 \langle \cos^2 \omega(t - r_1/c) + \cos^2 \omega(t - r_2/c) + 2 \cos \omega(t - r_1/c) \cos \omega(t - r_2/c) \rangle \quad (2.5)$$

$$= \left( \frac{A}{r} \right)^2 (1 + \cos[(r_1 - r_2)\omega/c]) \quad (2.6)$$

car le déphasage entre les deux cosinus est  $\phi = [(r_1 - r_2)\omega/c]$ . [Il a fait une substitution  $t' = t - r_1/c$  et utilisé Eq. (2.3).] Regarder Fig. 2.7; image tiré de [http://fr.wikipedia.org/wiki/Fentes\\_d'Young](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fentes_d'Young).

On peut réécrire ce résultat en fonction de la longueur d'onde :

$$\langle \psi_p^2(t) \rangle = \left( \frac{A}{r} \right)^2 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{\lambda} \right) \right]$$

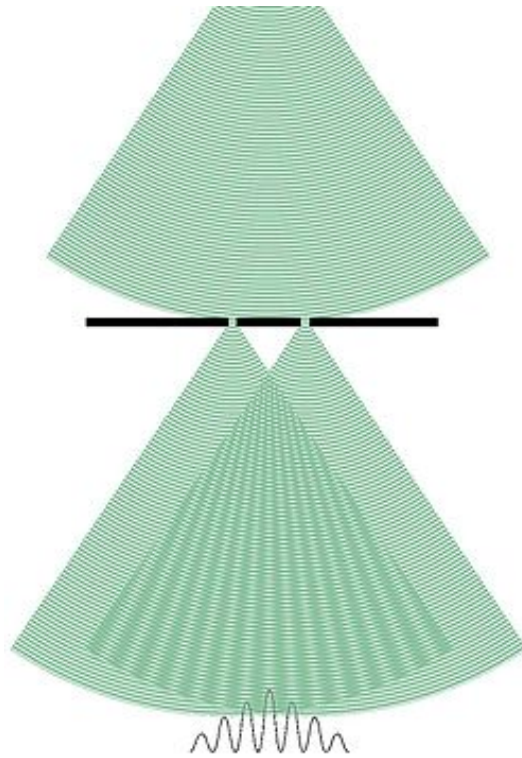


FIGURE 2.7 – Expérience de Young.

Dans ce calcul nous avons supposé que la différence de phases est due uniquement à la différence de marche. Il faut pour cela que les sources soient synchrones.

L'expression entre crochets peut varier de 0 à 2 selon la valeur du cosinus. Si la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde :

$$r_2 - r_1 = n\lambda \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

on a :

$$\cos\left(\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}\right) = \cos(2\pi n) = 1$$

et la puissance reçue est maximale. L'interférence est constructive et les positions correspondantes correspondent à des franges brillantes. Les vibrations provenant des deux fentes arrivent en phase.

Lorsque la différence de marche correspond à un nombre impair de demi-longueurs d'onde on a :

$$r_2 - r_1 = (2n + 1)\lambda/2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

on a :

$$\cos\left(\frac{2\pi(2n+1)}{2}\right) = -1$$

La puissance reçue en ces points est nulle et l'interférence est destructive. Cette condition détermine les position des franges sombres.

Les observations de Young ont apporté un appui très solide au modèle ondulatoire de la lumière.

## 2.4 Ondes électromagnétiques

L'expérience de Young a mis en évidence le caractère ondulatoire de la lumière mais la nature de cette onde n'était pas connue. Dans les décennies qui ont suivi les connaissances en électricité et en magnétisme ont beaucoup progressé. Les expériences de Faraday [Michael Faraday (1791–1867)] ont montré que ces deux domaines étaient liés.

Vers 1865 J. C. Maxwell a réalisé une remarquable synthèse des lois de l'électricité et du magnétisme. Il a montré qu'une solution possible des équations de l'électromagnétisme correspondait à une onde transversale. Un champ électrique et un champ magnétique mutuellement perpendiculaires oscillent dans des directions perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde. Il a obtenue pour la vitesse de phase l'expression  $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide et  $\mu_0$  est la perméabilité du vide. Ce résultat était très proche de la vitesse de la lumière dans le vide et Maxwell a émis l'hypothèse que la lumière est une onde électromagnétique.

Il était généralement admis qu'une onde avait besoin d'un milieu matériel pour se propager. Ce milieu matériel était appelé éther et la vitesse de la lumière devait être constante par rapport à l'éther.

## 2.5 L'interféromètre de Michelson

Dans l'interféromètre de Young la surface d'onde est séparée par un écran et les deux parties passant par les fentes sont recombinaées. L'interférence détermine la répartition de l'éclairement sur un écran ou une plaque photographique. Dans l'interféromètre de Michelson c'est l'amplitude de l'onde qui est divisée par un miroir semi-transparent. L'interférence est produite en recombinaant les deux parties.

Une source  $S$  produit un faisceau de lumière monochromatique dirigé sur une lame  $M_A$  dont la face arrière est partiellement métallisée pour la rendre semitransparente. Le faisceau est alors divisé en deux parties d'égal

intensité. Le faisceau transmis est réfléchi par le miroir  $M_B$  tandis que le faisceau réfléchi est dirigé vers le miroir  $M_C$ .

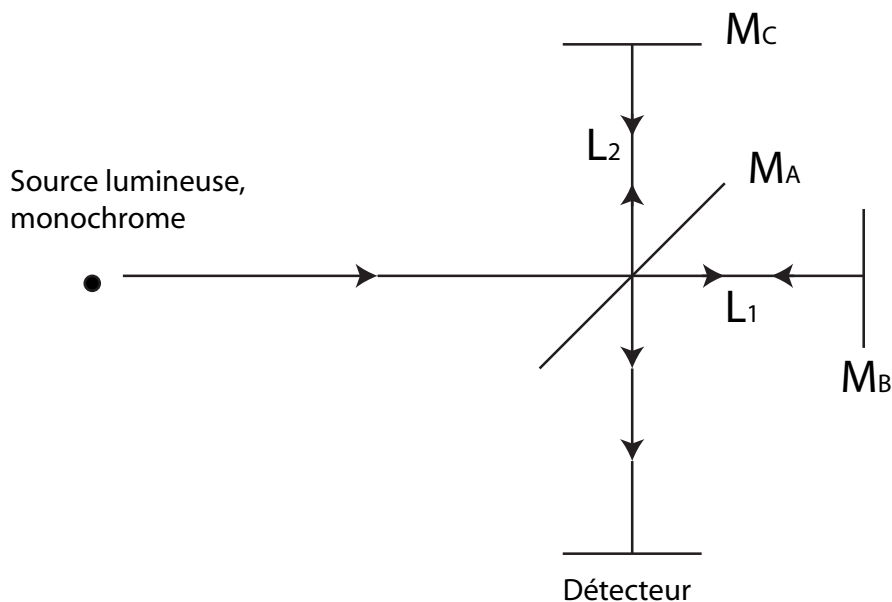


FIGURE 2.8 – Interféromètre de Michelson.

Le détecteur  $D$  reçoit le faisceau réfléchi par  $M_B$  puis par  $M_A$  ainsi que le faisceau réfléchi par  $M_C$  puis transmis par  $M_A$  si les deux ondes arrivent en phase au détecteur l'intensité est maximale et si elles arrivent en opposition de phase elle est minimale. Le parcours entre la source et  $M_A$  de même qu'entre  $M_A$  et le détecteur ne donne lieu à aucun déphasage. Le déphasage ne dépend que de la longueur des bras  $L_1$  et  $L_2$  de l'interféromètre.<sup>1</sup>

Si  $L_1 = L_2$  les ondes arrivent en phase au détecteur. De même si la différence de longueur est  $\lambda/2$  les ondes arrivent en phase car la différence de marche est  $\lambda$  pour un aller et retour. Si la différence de longueur est  $\lambda/4$  les ondes arrivent en opposition de phase.

La longueur d'onde de la lumière étant très petite il est impossible de s'assurer de la longueur des bras à une fraction de longueur d'onde précis. L'interféromètre permet cependant de détecter un changement de conditions d'interférence. Si le miroirs  $M_B$  est déplacé d'une petite distance au moyen

1. Une lame compensatrice peut être placée sur le chemin entre  $M_A$  et  $M_B$  pour compenser le fait que l'autre faisceau traverse la lame trois fois au lieu d'une.

d'une vis, l'intensité reçue par le détecteur varie périodiquement. On peut ainsi mesurer la longueur d'onde si le déplacement du miroir est connu.

## 2.6 L'expérience de Michelson et Morley

Michelson et Morley ont décidé d'utiliser l'interféromètre de Michelson pour essayer de mesurer la vitesse de la terre par rapport à l'éther. La vitesse tangentielle de la terre par rapport au soleil est de 30 km par seconde et le système solaire se déplace à 90 km/s par rapport à la Galaxie. Même si ces vitesses sont très inférieures à celle de la lumière l'interféromètre de Michelson avait la précision nécessaire pour mettre en évidence le mouvement de la terre par rapport à l'éther.

Pour illustrer l'idée de l'expérience prenons l'exemple d'un nageur qui peut se déplacer à une vitesse  $c$  par rapport à l'eau. L'eau de la rivière se déplace à la vitesse  $v$  [par rapport aux rives] et le nageur veut traverser la rivière perpendiculairement au courant pour aller de  $A$  à  $B$ .

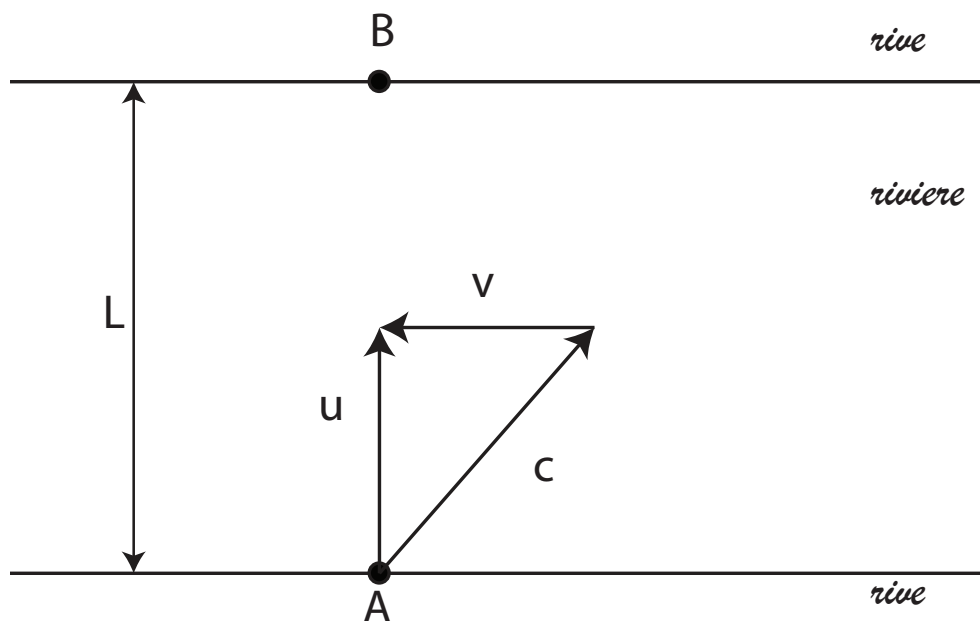


FIGURE 2.9 – Nager traverse la rivière de  $A$  à  $B$ .

Il doit choisir la direction de sa vitesse de telle sorte que la résultante soit

dirigée de  $A$  vers  $B$ . Autrement dit la composante de sa vitesse parallèle à la rivière doit annuler la dérive due à l'écoulement de l'eau.

La norme de la vitesse étant imposée la composante perpendiculaire au courant est :

$$c_{\perp} \equiv u = \sqrt{c^2 - v^2}.$$

Le temps nécessaire pour un aller retour est donc :

$$t_{\perp} = 2 \frac{L}{c_{\perp}} = 2 \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 2 \frac{L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où  $L$  est la largeur de la rivière.

Calculons maintenant le temps nécessaire pour faire un aller et retour entre les deux points  $D$  et  $E$  séparés d'une distance  $L$  sur une même ligne de courant. Pour aller de  $D$  à  $E$  (à contre courant) la vitesse du nageur par rapport à la rive  $c - v$ , et le temps nécessaire est :

$$t_{\text{aller}} = \frac{L}{c - v}.$$

Pour le retour la vitesse du nageur est (par rapport à la rive) est  $(c + v)$

et donc le temps nécessaire est :

$$t_{\text{retour}} = \frac{L}{c + v}.$$

Le temps pour l'aller-retour est donc :

$$\begin{aligned} t_{\parallel} = t_{\text{aller}} + t_{\text{retour}} &= \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = L \left( \frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) \\ &= L \frac{2c}{c^2 - v^2} = 2 \frac{L}{c} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le temps pour franchir une même distance est donc différent selon que le trajet est perpendiculaire ou parallèle à la rivière.

Revenons à l'expérience de Michelson et Morley. Supposons que le bras  $AB$  de l'interféromètre de longueur  $L_1$  soit dans la direction du déplacement de la terre par rapport à l'éther et que le bras  $AD$  de longueur  $L_2$  soit perpendiculaire à cette direction, Fig. 2.12.

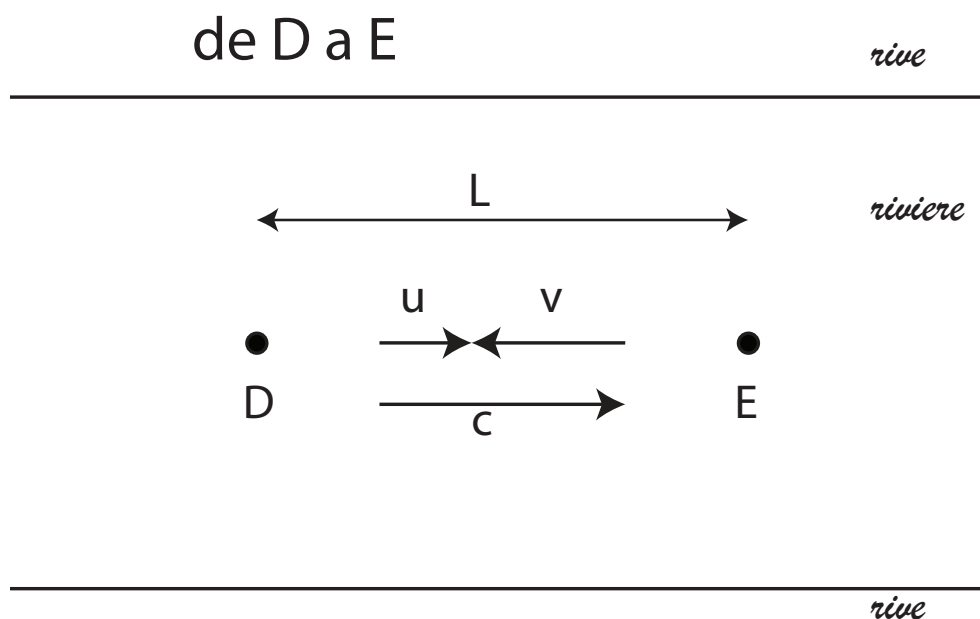


FIGURE 2.10 – Nager traverse la distance  $L$  de  $D$  à  $E$ . Il est ralenti à vitesse  $u = c - v$  par le courant.

[Faisant l'analogie : L'éther est comme l'eau de la rivière, la lumière est comme le nageur, la terre est comme les rives.] La vitesse de la lumière par rapport à l'éther étant  $c$ , elle est  $c - v$  par rapport à la terre (et donc à l'appareil) en allant de  $A$  à  $B$  et  $c + v$  en allant de  $B$  à  $A$ . Le temps nécessaire pour l'aller-retour est donc :

$$t_1 = 2 \frac{L_1}{c} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

Le miroir  $D$  se déplace par rapport à l'éther. Pour que la lumière reflétée en  $A$  l'atteigne il faut qu'une composante de sa vitesse soit parallèle au mouvement de la terre et égale à  $v$ . La vitesse dans la direction perpendiculaire est donc  $\sqrt{c^2 - v^2}$  et le temps d'un aller-retour est :

$$t_2 = 2 \frac{L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 2 \frac{L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Il existe donc une différence de temps de parcours entre les deux trajets qui est équivalente à une différence de marche. Le détecteur reçoit une

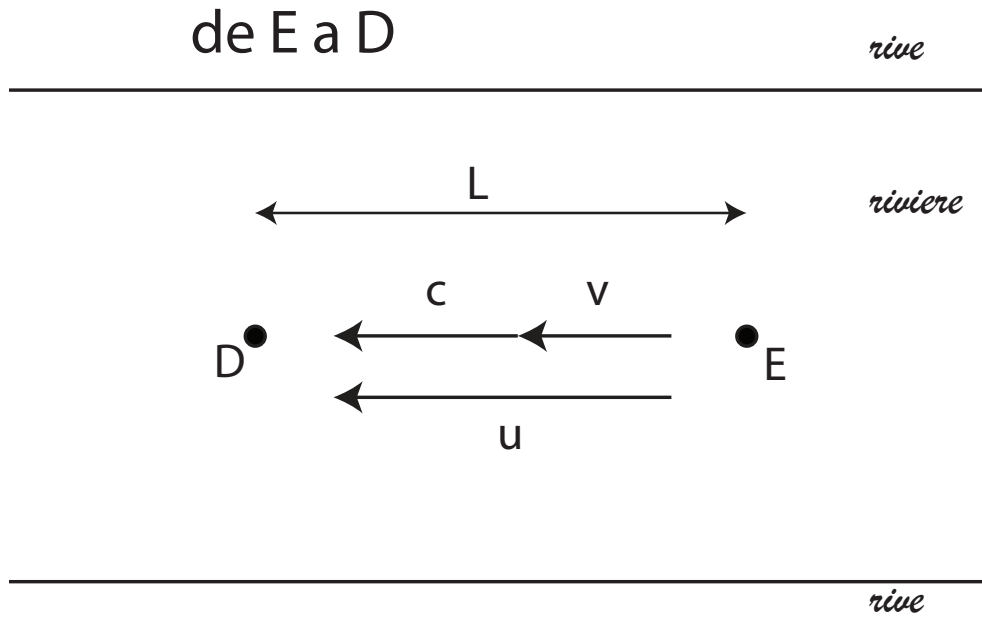


FIGURE 2.11 – Nager fait le retour de  $E$  à  $D$ . Sa vitesse est augmentée à  $u = c + v$  par le courant.

superposition de deux ondes déphasées. On a :

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c} \left( \frac{L_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{L_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Il est difficile de distinguer ce qui provient de la longueur des bras (pas rigoureusement égales) et de la vitesse de la terre.

En tournant l'appareil de  $90^\circ$  les bras  $AB$  et  $AD$  deviennent respectivement perpendiculaire et parallèle au mouvement de la terre. On a donc :

$$t'_1 = 2 \frac{L_1}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

et

$$t'_2 = 2 \frac{L_2}{c} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

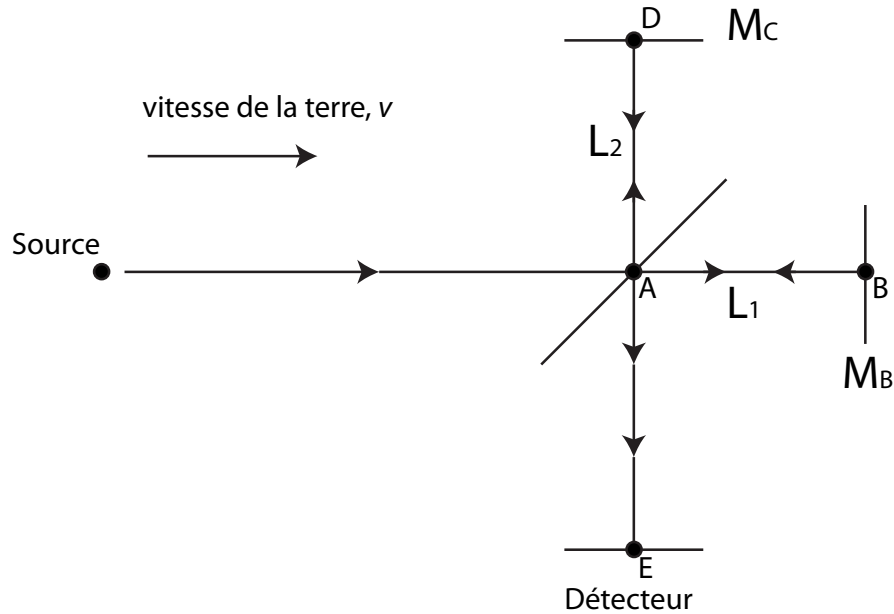


FIGURE 2.12 – Interféromètre de Michelson se déplace avec vitesse  $v$  par rapport à l'éther.

La différence de temps de parcours devient donc :

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \frac{2}{c} \left( \frac{L_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{L_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

La modification des conditions d'interférence en tournant l'appareil se traduit par la différence :

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c} \left( \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{L_1 + L_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

Ce résultat ne dépend que de la somme des longueurs des bras. Il n'est donc pas nécessaire que les deux bras aient rigoureusement la même longueur.

Lorsque la vitesse est beaucoup plus petite que celle de la lumière on a [grâce à la série du binôme] :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

et

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{c^2}$$

En portant ces résultats dans l'expression précédente il vient :

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c}(L_1 + L_2) \left( -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = -(L_1 + L_2) \left( \frac{v^2}{c^3} \right)$$

La différence entre les décalages est donc du second ordre en  $v/c$ .

## 2.7 Résultats et interprétation

La différence de marche équivalente est :

$$c(\Delta t' - \Delta t) = -(L_1 + L_2) \left( \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Dans l'appareil utilisé la longueur de chaque bras était d'environ 11 m. Pour une vitesse de 30 km/s on a  $v^2/c^2 = 10^{-8}$ , et la différence de marche produite par le mouvement de la terre devait être de l'ordre de  $2,2 \times 10^{-7}$  m ce qui est un peu inférieure à une longueur d'onde. Le déphasage était donc facilement détectable.

La direction du mouvement de la terre à travers l'éther n'est pas connue à priori. Michelson et Morley ont posé leur appareil sur un bain de mercure pour le stabiliser et le tourner facilement. En tournant l'appareil dans toutes les directions et en répétant les mesures tout au long de l'année ils auraient certainement trouvé des conditions correspondant aux calculs précédents. La sensibilité de l'appareil permettait de détecter une vitesse de 10 km/s. *Or aucun effet dû au mouvement de la terre n'a pu être mis en évidence !*

Différentes interprétations ont été proposées dont un entrainement de l'éther avec le mouvement de la terre. Cette hypothèse était cependant incompatible avec d'autres phénomènes comme l'aberration des étoiles. Fitzgerald a émis l'hypothèse que les dimensions des objets dans la direction du mouvement par rapport à l'éther sont contractées d'un facteur  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . La différence de temps de parcours dans les deux bras de l'appareil s'annule ce qui rend indétectable le mouvement de la terre par rapport à l'éther. Lorentz a justifié cette contraction sur la base de la théorie électromagnétique de Maxwell.

Einstein a proposé autre interprétation que nous allons examiner au prochain chapitre.

## 2.8 Exercices

**Exer. 2-1** Un rayon lumineux se rapproche de la normale quand il passe d'un milieu à un autre dont la vitesse de la lumière est inférieure, voir Fig. 2.6. Soit  $c/n_1$  et  $c/n_2$  les vitesses dans le premier et second milieux respectivement. En fait on a

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{loi de Snell, ou Snell-Descartes} \quad (2.8)$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont l'angle entre le rayon et la normale de milieu 1 et milieu 2, voir Fig. 2.13. On peut dériver la loi de Snell utilisant le principe de Fermat qui s'énonce :

La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit localement minimale (localement signifiant : pour une trajectoire "petite". [http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe\\_de\\_Fermat](http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_Fermat))

Supposons que le chemin du rayon entre deux points fixes  $A$  et  $B$  se compose de deux segments droits. Dérivez la loi de Snell-Descartes.

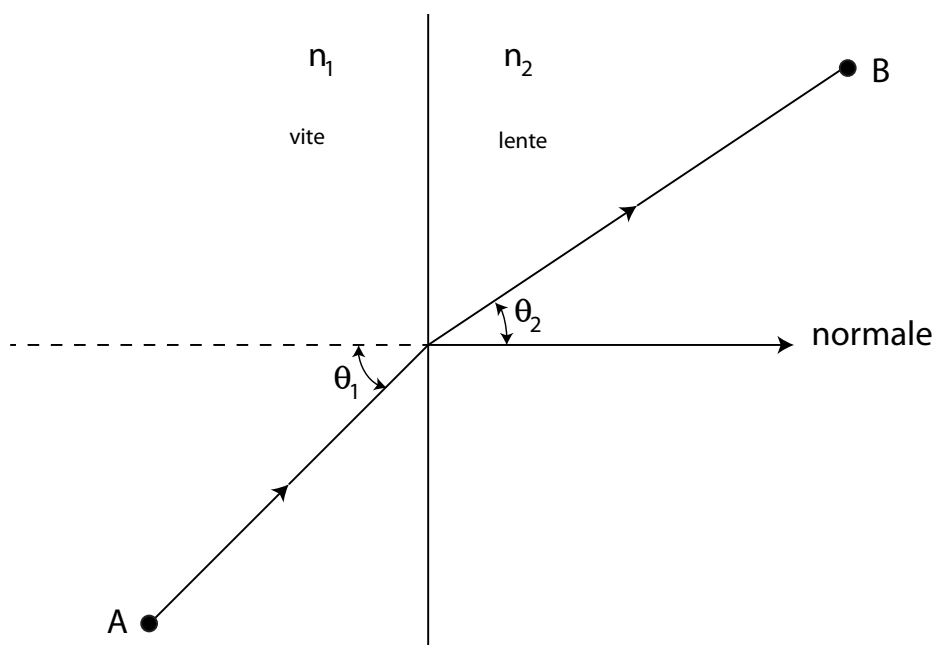


FIGURE 2.13 – Réfraction d'une onde plane passant d'un milieu avec vitesse de phase plus grande,  $c/n_1$ , à un milieu avec vitesse plus lente,  $c/n_2$ .

**Exer. 2-2** Pour accorder une guitare, on joue ce qu'on espère est la même note avec deux cordes différentes. Si la deuxième corde est juste un petit peu hors la bonne note, on attend une note qui est la moyenne des deux cordes mais l'amplitude fluctue régulièrement. On peut comprendre ce phénomène utilisant le principe de superposition des ondes. Disons les fréquences des cordes sont  $\omega_0$  et  $\omega_1$  respectivement. Montrez que la superposition des ondes donne une onde proportionnel à

$$\psi = \cos[(\omega_0 + \omega_2)/2t] \cos[\omega_0 - \omega_2)/2t] \quad (2.9)$$

*Indice : additionner les identités :*

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \quad (2.10)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \quad (2.11)$$



# Chapitre 3

## La Relativité Restreinte

### 3.1 Postulats de la relativité restreinte

La relativité restreinte constitue une extension de la relativité de Galilée à l'ensemble des lois de la physique. Elle peut se fonder sur deux principes que nous allons énoncer ci-dessous.

Selon le premier principe les lois fondamentales de la physique gardent la même forme dans tous les repères inertiels. Si une loi est vérifiée dans un repère inertiel elle est vraie dans tous les repères se déplaçant à vitesse constante par rapport à celui-ci.

Le second postulat admet que la vitesse de la lumière [dans le vide] est indépendante du mouvement de la source ou de l'observateur. Il peut sembler étonnant que la vitesse de propagation d'un phénomène particulier joue un rôle aussi important. La vitesse de la lumière dans le vide est une constante fondamentale qui joue un rôle même dans des phénomènes qui n'impliquent pas d'interaction électromagnétique.

En 1905 seules les lois de la mécanique classique et de l'électromagnétisme étaient connues. Depuis, d'autres lois et d'autres interactions ont été découvertes<sup>1</sup> et elles sont toutes en accord avec la relativité restreinte. La covariance des lois fondamentales de la nature est maintenant bien établie. Aucune expérience ne peut mettre en évidence d'un repère au repos absolu et la notion de l'éther devient inutile.

L'expérience de Michelson et Morley a montré que la vitesse de la lumière est indépendante du mouvement de l'observateur. D'autres expériences ont utilisé différentes sources (soleil, étoiles, ...) et ont obtenu les mêmes résultats. La mesure de la vitesse de la lumière dans le vide donne toujours le même résultat. La transformation de Galilée doit donc être remise en ques-

---

1. L'interaction gravitationnelle joue un rôle particulier.

tion.

Considérons deux observateurs utilisant des repères dont les axes sont parallèles. Les origines  $O$  et  $O'$  coïncident à l'instant  $t = t' = 0$ . A ce moment une source ponctuelle coïncidant avec  $O$  et  $O'$  produit une onde. Nous allons d'abord considérer le cas d'une onde mécanique à la surface de l'eau par exemple puis le cas d'une onde électromagnétique.

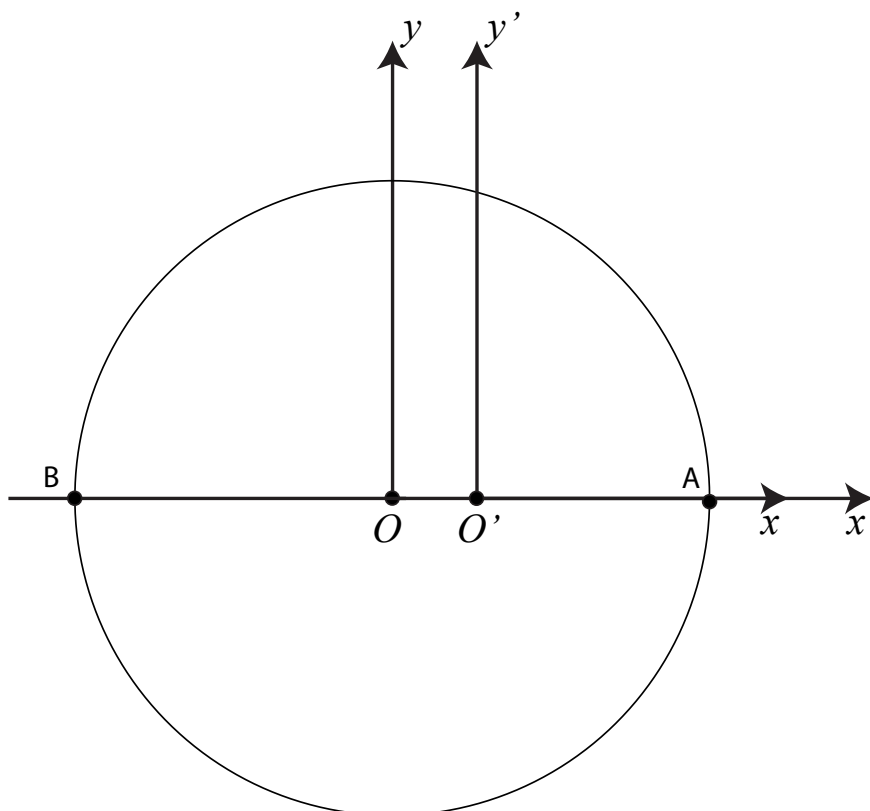


FIGURE 3.1 – Source ponctuelle d'onde à l'origine  $O$ , stationnaire dans  $R$ . Le cercle est la surface d'onde émise à  $t = 0$  quand  $O$  et  $O'$  étaient coïncidentes.

Dans le cas d'une onde mécanique circulaire les points  $A$  et  $B$  sont à égale distance de l'origine  $O$  car la vitesse de l'onde  $c$  est la même dans les deux sens. N.B. Les points  $A$  et  $B$  appartiennent à une même surface d'onde.

Les points  $A$  et  $B$  ne sont pas à la même distance de  $O'$  car la vitesse du point  $A$  par rapport à  $O'$  est  $c - v$  tandis que celle du point  $B$  est  $c + v$ . Le

point  $O'$  n'est donc pas au centre du cercle correspondant à la surface d'onde.

Supposons maintenant que la source produit une onde électromagnétique comme la lumière. Même pour  $O'$  la vitesse due point  $A$  est égale à celle du point  $B$  car la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs. Elle est la même dans toutes les directions.

Pour l'observateur  $O$  l'équation de la surface d'onde s'écrit :

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

C'est donc une sphère de rayon  $ct$ . Pour l'observateur  $O'$  la surface d'onde est également une sphère car la vitesse de propagation est la même dans toutes les directions. L'équation de la surface d'onde s'écrit :

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

Cette relation est incompatible avec la transformation de Galilée (avec  $t = t'$ ). Il faut donc chercher une transformation plus générale qui se ramènera à celle de Galilée lorsque la vitesse relative des observateurs est petite par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide.

## 3.2 Invariance des longueurs perpendiculaires au mouvement relatif

Considérons deux tiges verticales  $A$  et  $B$  pouvant glisser sur une surface horizontale, Fig. 3.2. Lorsqu'elles sont au repos une source fixée sur  $A$  émet un faisceau de lumière qui atteint un point  $P$  sur  $B$ , Fig. 3.2(a).

Lorsque la tige  $A$  se déplace vers  $B$  à la vitesse  $v$  le point éclairé  $P'$ , Fig. 3.2(b), est-il plus haut ou plus bas que  $P$  ?

S'il est plus haut l'observateur au repos par rapport à  $B$  en déduira que le mouvement a pour effet de dilater les longueurs perpendiculaires au mouvement. L'observateur au repos par rapport à  $A$  en déduira que la tige  $B$  qui s'approche de lui à la vitesse  $v$  se contracte et que le mouvement a pour effet de contracter les longueurs perpendiculaires.

Les deux observateurs se déplaçant avec une vitesse relative constante en déduisant donc des lois de transformation différentes ce qui est contraire au principe de relativité. Le problème serait le même si le point  $P'$  était plus bas que le point  $P$ . La seule façon de respecter le principe de relativité est d'admettre l'invariance des dimensions perpendiculaires au mouvement relatif.

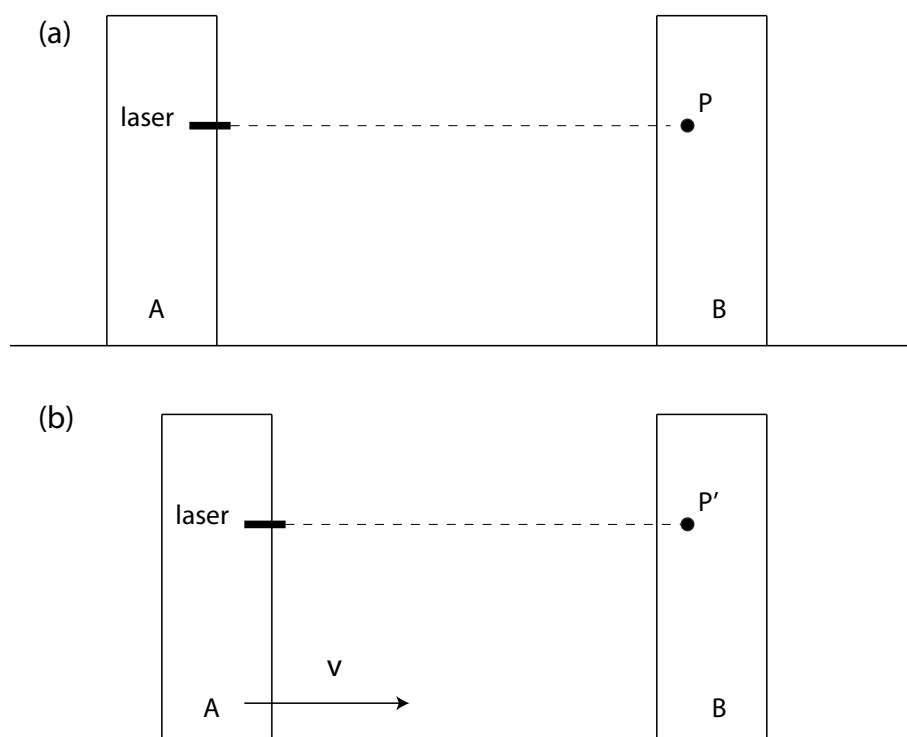


FIGURE 3.2 – Le laser sur tige  $A$  fait un faisceau de lumière horizontale qui éclaire un point sur tige  $B$ . (a) Les deux tiges sont immobiles l'une par rapport à l'autre. Le point éclairé est  $P$ . (b) La tige  $A$  s'approche la tige  $B$  à la vitesse  $v$ . Le point éclairé est  $P'$ .

### 3.3 La transformation de Lorentz

Imaginons nous avons deux référentiels inertiels  $R$  et  $R'$  en mouvement relatif. Nous supposons que l'espace est isotrope et donc nous pouvons toujours orienter les axes comme nous voulons. Alors, sans perte de généralité, nous pouvons orienter les axes des  $x$  et  $x'$  dans la direction du mouvement relatif. Le résultat du paragraphe précédent implique dans ce cas que

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (3.1)$$

Alors nous nous concentrons sur les coordonnées  $x$  et  $t$ .

La transformation des abscisses et des temps entre deux repères inertiels doit donc vérifier la condition :

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2. \quad (3.2)$$

Il faut donc une transformation plus générale que celle de Galilée.

Si l'espace-temps est uniforme la transformation est linéaire. Elle peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

où les  $L_{ij}$  sont des coefficients sans dimension.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} ct' &= L_{11}ct + L_{12}x \\ x' &= L_{21}ct + L_{22}x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Il y a quatre valeurs à trouver. Il faut trouver quatre équations indépendantes. Nous tentons d'exprimer les coefficients  $L_{11}, L_{12}, L_{21}$  en fonction de  $L_{22}$  et  $v/c$ .

(i) Considérons le mouvement rectiligne uniforme de l'origine  $O'$  dans  $R$ . Nous savons que  $O'$  a une vitesse  $v$  le long de l'axe des  $x$ . L'origine a toujours  $x' = 0$ . Donc, si on fixe  $x' = 0$  on doit avoir  $x/t = v$ . Alors

$$\begin{aligned} x' &= L_{21}ct + L_{22}x = 0 \\ L_{21} &= -L_{22} \frac{x}{ct} = -L_{22} \frac{v}{c} \\ L_{21} &= -\beta L_{22}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $\beta \equiv v/c$ .

(ii) L'invariance de la vitesse de propagation d'un signal lumineux le long de l'axe  $Ox > 0$  (ou de l'axe  $O'x'$ ) s'écrit :

$$1 = \frac{x}{ct} = \frac{x'}{ct'},$$

soit

$$1 = \frac{x'}{ct'} = \frac{L_{21}ct + L_{22}x}{L_{11}ct + L_{12}x} = \frac{L_{21}ct + L_{22}ct}{L_{11}ct + L_{12}ct} = \frac{L_{21} + L_{22}}{L_{11} + L_{12}},$$

soit

$$L_{11} + L_{12} = L_{21} + L_{22}. \quad (3.5)$$

(iii) La même chose que (ii) sauf le signal lumineux se propage dans l'autre sens :

$$-1 = \frac{x}{ct} = \frac{x'}{ct'},$$

soit

$$-1 = \frac{x'}{ct'} = \frac{L_{21}ct + L_{22}x}{L_{11}ct + L_{12}x} = \frac{L_{21}ct - L_{22}ct}{L_{11}ct - L_{12}ct} = \frac{L_{21} - L_{22}}{L_{11} - L_{12}},$$

soit

$$L_{12} - L_{11} = L_{21} - L_{22}. \quad (3.6)$$

Soustrayons Eq. (3.6) de Eq. (3.5) nous avons

$$\begin{aligned} L_{11} + L_{12} - (L_{12} - L_{11}) &= L_{21} + L_{22} - (L_{21} - L_{22}) \\ 2L_{11} &= 2L_{22} \\ L_{11} &= L_{22}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sommons Eq. (3.6) de Eq. (3.5) nous avons

$$\begin{aligned} L_{11} + L_{12} + (L_{12} - L_{11}) &= L_{21} + L_{22} + (L_{21} - L_{22}) \\ 2L_{12} &= 2L_{21} \\ L_{12} &= L_{21} = -L_{22}\beta. \end{aligned} \quad \text{utilisé Eq. (3.4)} \quad (3.8)$$

Nous avons éliminé trois paramètres et donc nous pouvons écrire Eq. (3.9) avec un seul paramètre inconnu :

$$\begin{aligned} ct' &= L_{22}ct - \beta L_{22}x \\ x' &= -\beta L_{22}ct + L_{22}x. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Finalement nous utilisons Eq. (3.2)

$$\begin{aligned} c^2t^2 - x^2 &= c^2t'^2 - x'^2 \\ &= (L_{22}ct - \beta L_{22}x)^2 - (-\beta L_{22}ct + L_{22}x)^2 \\ &= L_{22}^2(1 - \beta^2)(c^2t^2 - x^2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} L_{22}^2 &= \frac{1}{1 - \beta^2} \\ L_{22} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nous prenons la racine positive car sinon  $x$  et  $x'$  sont dirigés dans des sens opposés. Alors nous définissons

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.12)$$

et nous avons la transformation de Lorentz s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma & 0 & 0 \\ -\beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

La transformation inverse s'obtient simplement en remplaçant  $\beta$  par  $-\beta$ .

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta \gamma & 0 & 0 \\ \beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

On appelle quadri-vecteur un ensemble de quatre composantes qui se transforment de la même manière. Le cas particulier étudié ici est le quadri-vecteur position. N.B. Cette transformation a été établie par Lorentz puis Henri Poincaré entre 1895 et 1904 et par une autre méthode par Einstein en 1905. Joseph Larmor l'avait obtenu avant 1900 mais le premier à la trouver est sans doute Woldemar Voigt en 1882!

### 3.4 Addition des vitesses

Un repère d'origine  $O'$  se déplace à la vitesse  $v_1$  par rapport à un repère d'origine  $O$ . Un autre repère d'origine  $O''$  se déplace par rapport à celui d'origine  $O'$ . On cherchera à déterminer la vitesse de  $O''$  par rapport à  $O$ .

En appliquant la transformation de Galilée on trouverait  $v = v_1 + v_2$  mais cela pourrait conduire à une vitesse supérieure à celle de la lumière. La transformation de Lorentz permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \gamma_1 \\ \beta_1 \gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

où  $\beta_1 = v_1/c$ , et  $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - \beta_1^2}$ .

La transformation peut être appliquée entre les repères  $R'$  et  $R''$  :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & \beta_2 \gamma_2 \\ \beta_2 \gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

où  $\beta_2 = v_2/c$ , et  $\gamma_2 = 1/\sqrt{1 - \beta_2^2}$ .

En combinant ces deux transformations de Lorentz on obtient :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \gamma_1 \\ \beta_1 \gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & \beta_2 \gamma_2 \\ \beta_2 \gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

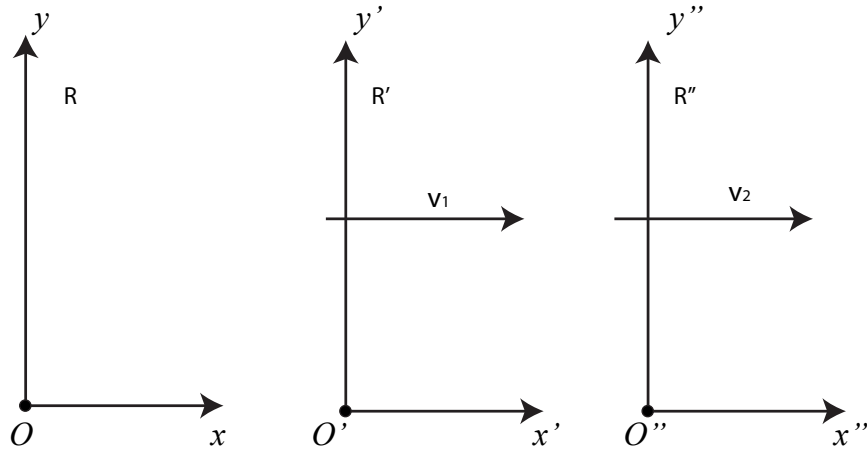


FIGURE 3.3 – Il y a trois repères inertiels,  $R$ ,  $R'$ , et  $R''$ . Le repère  $R'$  a la vitesse  $v_1$  par rapport à  $R$ . Le repère  $R''$  a la vitesse  $v_2$  PAR RAPPORT à  $R'$ . Nous cherchons la vitesse  $v$  de repère  $R''$  par rapport à  $R$ .

où

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 + \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 & \beta_2\gamma_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_1\gamma_2 \\ \beta_1\gamma_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1\gamma_2 & \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

On note  $v$  la vitesse de  $O''$  par rapport à  $O$ . La transformation de Lorentz entre  $R$  et  $R''$  sans passer par  $R'$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

où  $\beta = v/c$  et  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ . En comparant les deux relations on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \\ \beta\gamma &= (\beta_1 + \beta_2)\gamma_1\gamma_2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

En divisant membre à membre il vient :

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

soit :

$$v/c = \frac{v_1/c + v_2/c}{1 + v_1v_2/c^2}$$

c'est à dire :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}}$$

C'est la loi d'addition des vitesses qui remplace celle de Galilée. La différence n'est pas très grande pour des vitesses très inférieures à celle de la lumière.

Prenons par exemple  $v_1 = v_2 = \frac{3}{4}c$ . On obtient :

$$v = \frac{(3/4 + 3/4)c}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3/2 \times 16}{16 + 9}c = \frac{24}{25}c$$

La vitesse résultante ne dépasse jamais  $c$ .

On peut obtenir la loi d'addition des vitesses d'une autre façon. Considérons une particule qui se trouve à l'origine commune de  $R$  et  $R'$  à  $t = t' = 0$  et qui se déplace à la vitesse  $v'$  dans  $R'$ . On a donc :

$$x' = v't'$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} ct &= \gamma ct' + \gamma \beta x' \\ x &= \gamma \beta ct' + \gamma x' \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $\beta = V/c$ , et  $V$  est la vitesse relative des repères. En éliminant  $x'$  il vient :

$$\begin{aligned} ct &= (\gamma c + \gamma \beta v')t' \\ x &= (\gamma \beta c + \gamma v')t' \end{aligned} \quad (3.17)$$

On en déduit :

$$\frac{x}{ct} = \frac{\beta c + v'}{c + \beta v'}$$

soit :

$$\frac{x}{t} = \frac{V + v'}{1 + \frac{Vv'}{c^2}}$$

La vitesse de la particule dans le repère  $R$  est donc :

$$v = \frac{V + v'}{1 + \frac{Vv'}{c^2}}$$

On retrouve donc la loi d'addition des vitesses.

## 3.5 Dilatation des durées

Un événement correspond à un point de l'espace-temps (dans le cas général trois coordonnées d'espace et une de temps). Un événement  $E_1$  a pour coordonnées  $(ct_1, x_1)$  dans  $R$  et  $(ct'_1, x'_1)$  dans  $R'$ . Pour un événement  $E_2$

ces coordonnées sont respectivement  $(ct_2, x_2)$  dans  $R$  et  $(ct'_2, x'_2)$  dans  $R'$ . La transformation de Lorentz permet d'écrire :

$$\begin{aligned} ct_1 &= \gamma ct'_1 + \beta \gamma x'_1 \\ ct_2 &= \gamma ct'_2 + \beta \gamma x'_2 \end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$c(t_2 - t_1) = \gamma c(t'_2 - t'_1) + \beta \gamma (x'_2 - x'_1)$$

On voit que deux événements simultanés dans un repère ne le sont pas dans l'autre repère, s'ils ne se produisent pas au même endroit ( $x'_2 \neq x'_1$ ). La relativité de la simultanéité joue un rôle très important dans l'analyse des phénomènes.

Considérons une horloge au repos dans  $R'$ . Ce repère est alors appelé repère propre de l'horloge. L'intervalle de temps entre les mêmes événements mesuré dans  $R$  est plus long car :

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

( et  $\gamma > 1$ ). L'intervalle de temps propre est toujours plus court. Cette propriété du temps ne dépend pas du type d'horloge utilisé pour le mesurer.

Considérons une expérience de pensée illustrant le fonctionnement d'une horloge à photons. Un photon se réfléchit sur deux miroirs parallèles, Fig. 3.4. L'unité de temps correspond à l'intervalle entre l'aller et le retour du photon sur un miroir, Fig. 3.4(a). On a :

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}$$

C'est l'intervalle de temps propre.

Dans le repère  $R$  le photon ne fait pas l'aller-retour entre les mêmes points. Le trajet du photon est une ligne brisée comme sur la Fig. 3.4(b).

La vitesse de la lumière est  $c$ . Si l'impact du photon se fait toujours au même endroit sur le miroir la projection de sa vitesse sur  $Ox$  doit être égale à celle du repère  $R'$ . Sa composante perpendiculaire aux miroirs est donc  $\sqrt{c^2 - v^2}$ . Le temps nécessaire pour un aller-retour est donc :

$$\Delta t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

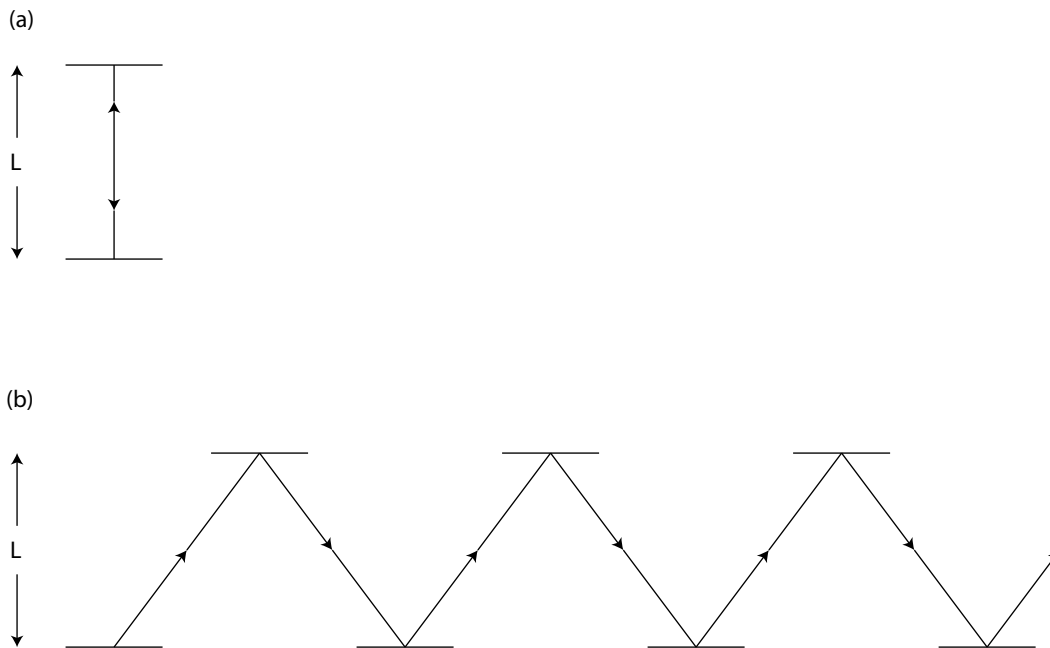


FIGURE 3.4 – (a) L'horloge à photon est au repos par rapport à l'observateur ;  
 (b) L'horloge à photon est en mouvement par rapport à l'observateur

soit :

$$\Delta t = \Delta t' \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t'.$$

L'horloge à photon tourne plus lentement dans un repère impropre. Mais ça doit être le cas pour tous les horloges qui mesurent le temps correctement. Si l'horloge à photon est synchronisée avec une autre dans  $R'$  ce dernier tourne exactement comme l'horloge à photon dans  $R$  aussi. C'est une exigence du principe de relativité. En effet, si deux horloges synchronisées dans  $R'$  ne l'étaient pas dans un autre repère on pourrait faire jouer un rôle privilégié au repère  $R'$ .

Nous allons voir quelques applications qui montrent la réalité de la dilatation des durées lorsqu'une horloge est en mouvement dans le repère de l'observateur.

### 3.5.1 Détection des muons

Le muon est une particule chargée dont la masse est environ 207 fois celle de l'électron. Par plusieurs aspects il ressemble à l'électron et les deux particules appartiennent à la famille des leptons. Contrairement à l'électron

le muon est instable et une population varie selon la loi :

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau},$$

où  $\tau$  représente le temps de vie moyen. Pour le muon  $\tau = 2,2 \times 10^{-6}$ s et lorsque  $t = \tau$  la population tombe à 37% de sa valeur initiale. La *demi-vie* ou le temps nécessaire pour que la population tombe à 50% de sa valeur initiale est :  $\tau \ln 2 = 1,5 \times 10^{-6}$ s.

Même en se déplaçant à une vitesse proche de celle de la lumière la distance moyenne parcourue par un muon est de l'ordre de 600 m. Or ils sont produits dans la haute atmosphère par impact des rayons cosmiques (par exemple protons) sur des noyaux d'azote. Ils devraient pratiquement tous être désintégrés avant d'atteindre le sol. Or on en observe beaucoup ce qui traduit une dilatation de leur durée de vie.

On peut étudier quantitativement la loi de désintégration et mesurer leur vie moyenne en fonction de leur vitesse. Pour cela on sélectionne la vitesse et on mesure le nombre de muons détectés pendant un intervalle de temps au sommet d'une montagne puis au niveau de la mer. On a pu ainsi vérifier la formule de dilatation des durées en fonction de la vitesse.

### 3.5.2 Expansion de l'univers

### 3.5.3 Les jumeaux de Langevin

## 3.6 Contraction des longueurs

On mesure la longueur d'une tige en déterminant les abscisses de ses extrémités. Si la tige est immobile ces abscisses peuvent être mesurées à des instants arbitraires. On obtient ainsi la longueur propre de la tige. Dans un repère où la tige est en mouvement il est important que les mesures des abscisses soient faites au même instant. Or deux événements simultanés dans un repère ne sont pas en général simultanés dans d'autres repères. La longueur d'une tige va donc dépendre de sa vitesse dans un repère donné.

Inversons la transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Les abscisses de deux points, mesurées dans le repère  $R'$  sont données par :

$$\begin{aligned} x'_2 &= -\beta\gamma ct_2 + \gamma x_2, \\ x'_1 &= -\beta\gamma ct_1 + \gamma x_1. \end{aligned}$$

Si la tige est au repos dans  $R'$  sa longueur propre est :

$$L' = x'_2 - x'_1.$$

La différence d'abscisses vérifie la condition :

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) - \beta\gamma(ct_2 - ct_1).$$

L'observateur attaché au repère  $R$  déterminera la longueur de la tige en mesurant les abscisses de ses extrémités au même instant ( $t_2 = t_1$ ). La longueur obtenue sera :

$$L = x_2 - x_1,$$

d'où la relation avec la longueur propre :

$$L' = \gamma L$$

soit

$$L = \frac{L'}{\gamma}.$$

La longueur propre est donc toujours plus grande que la longueur mesurée dans un repère où la tige est en mouvement. C'est ce que l'on appelle *la contraction des longueurs*.

La contraction des longueurs est un phénomène cinématique et non dynamique comme l'ont cru Fitzgerald, Lorentz, et Poincaré. Aucune force n'est à l'origine de cette contraction. C'est un effet de perspective. Il ne s'agit pas d'une illusion ; c'est une vraie longueur.

Revenons sur l'exemple du muon qui traverse l'atmosphère. Dans son repère propre sa durée de vie moyenne est  $2,2\mu\text{s}$ . Il a donc très peu de chances de franchir des dizaines de km. Cependant, dans son repère l'épaisseur de l'atmosphère est divisée par  $\gamma$ . Elle est donc très inférieure à celle que nous mesurons.

## 3.7 Transformation des vitesses



# Chapitre 4

## L'espace-temps

### 4.1 Intervalle d'espace-temps

Un événement correspond à un point dans l'espace-temps à quatre dimensions. Il a lieu à un endroit et à un instant donnés.

La transformation de Lorentz est construite pour que la quantité  $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$  soit invariante dans un changement de repère. Il en est de même pour la quantité :

$$s_{21}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

[Sinon, ça impliquerait une origine du système des coordonnées privilégiée.] On appelle  $s_{21}$  l'intervalle d'espace temps entre deux événements. Cet intervalle étant le même pour tous les référentiels galiléens (*i.e.* inertiels) il a une signification absolue. Pour des événements très proches l'intervalle devient infinitésimal et on peut écrire :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

(Pour être très précise, on devrait écrire :

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2,$$

mais personne ne le fait).

Si l'intervalle entre deux événements est réel ( $ds^2 > 0$ ) on dit qu'ils sont *du genre temps*. Le temps écoulé est assez long pour que la séparation spatiale puisse être franchie par un objet matériel. Il peut exister une relation de cause à effet entre les deux événements.

La trajectoire d'un objet ponctuel dans l'espace-temps est appelée *ligne d'univers*. Deux points appartenant à une ligne d'univers d'un objet matériel définissent nécessairement un intervalle de genre temps.

Lorsque l'intervalle est nul les événements sont dits du genre lumière. Leur séparation spatiale est telle qu'il faut se déplacer à la vitesse de la lumière pour aller d'un point à l'autre dans l'intervalle de temps correspondant.

Lorsque l'intervalle est imaginaire ( $ds^2 < 0$ ) la séparation spatiale est trop grande pour qu'un signal puisse la franchir durant l'intervalle de temps correspondant. Il ne peut pas exister de relation causale entre les deux événements. Nous verrons que l'ordre des événements n'est pas nécessairement le même dans deux référentiels différents. Cet intervalle est dit du genre espace.

L'espace-temps utilisé en relativité restreinte est appelé espace-temps de Minkowski du nom du mathématicien qui l'a défini. On peut étudier les aspects essentiels de la relativité restreinte en utilisant une seule coordonnée spatiale. On trace des axes perpendiculaires correspondant à  $x$  et à  $ct$ . La ligne d'univers d'une particule au repos est une droite parallèle à l'axe  $ct$ . Pour un photon la ligne d'univers est une droite faisant un angle de  $45^\circ$  ou de  $135^\circ$  avec l'axe des  $x$ . Pour une particule se déplaçant à vitesse constante la ligne d'univers est une droite plus proche de l'axe  $ct$  que de l'axe des  $x$ .

Si on fait coïncider l'origine avec l'instant présent et la position « ici », les valeurs positives de  $ct$  représentent le futur et les valeurs négatives représentent le passé. Les régions pour lesquelles  $|x| < |ct|$  représentent le lieu des intervalles du genre temps. Les droites faisant un angle de  $45^\circ$  ou de  $135^\circ$  avec l'axe des  $x$  sont les lieux des intervalles du genre lumière. Les intervalles du genre espace correspondent aux régions ailleurs pour lesquelles  $|x| > |ct|$ .

Considérons deux événements  $A$  et  $B$  repérés par  $(ct_A, x_A)$  et  $(ct_B, x_B)$  dans  $R$  et par  $(ct'_A, x'_A)$  et  $(ct'_B, x'_B)$  dans  $R'$ . La transformation de Lorentz permet d'écrire :

$$c(t'_B - t'_A) = \gamma[c(t_B - t_A) - \beta(x_B - x_A)]$$

Posons :

$$\frac{x_B - x_A}{c(t_B - t_A)} = \alpha$$

Si  $|\alpha| > 1$  les événements sont du genre espace et si  $|\alpha| < 1$  ils sont du genre temps. On peut écrire :

$$c(t'_B - t'_A) = \gamma c(t_B - t_A) - \beta \gamma \alpha c(t_B - t_A) = \gamma c(t_B - t_A)(1 - \alpha \beta)$$

Si  $\alpha < 1$  la paranthèse est positive car  $\beta < 1$ . Les quantités  $(t'_B - t'_A)$  et  $(t_B - t_A)$  sont de même signe. On en déduit que l'ordre des événements est le même dans les deux repères. C'est une condition nécessaire pour qu'une relation causale puisse exister.

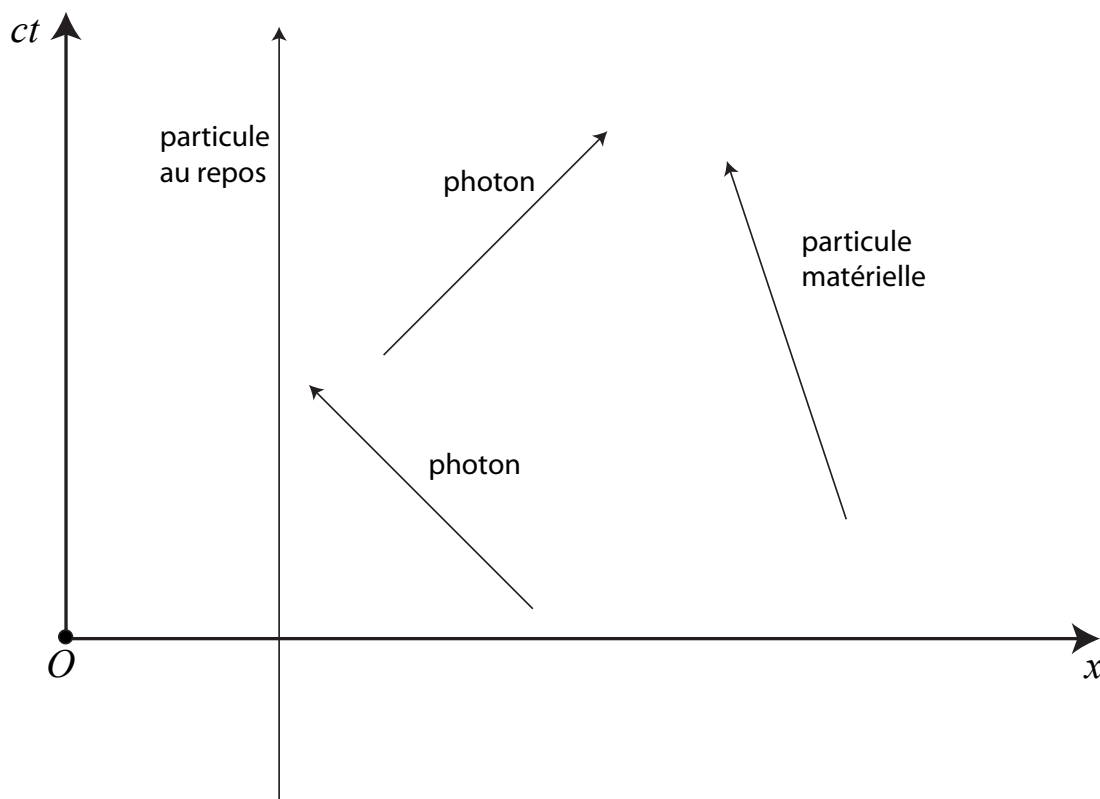


FIGURE 4.1 – Lignes d'univers de quelques particules dans le plan  $ct-x$  d'espace de Minkowski. Les photons ont forcément un angle de  $45^\circ$  ou de  $135^\circ$  avec l'axe des  $x$ . Les particules matérielles ont une ligne d'univers forcément plus proche de l'axe  $ct$  que de l'axe des  $x$ .

Pour des événements du genre espace on a  $|\alpha| > 1$  et l'expression  $(1 - \alpha\beta)$  peut être positive ou négative. Dans ce dernier cas l'ordre des événements peut être différent dans  $R$  et dans  $R'$ . Il ne peut donc pas y avoir de relation causale entre les deux événements.

## 4.2 Les quadri-vecteurs

Le quadri-vecteur  $(ct, x, y, z)$  est le quadri-vecteur position. La transformation de Lorentz donne la relation entre les composantes mesurées dans deux repères inertiels. Elle est construite pour que la quantité  $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$  soit invariante. Nous allons voir comment construire d'autres quadri-vecteurs.

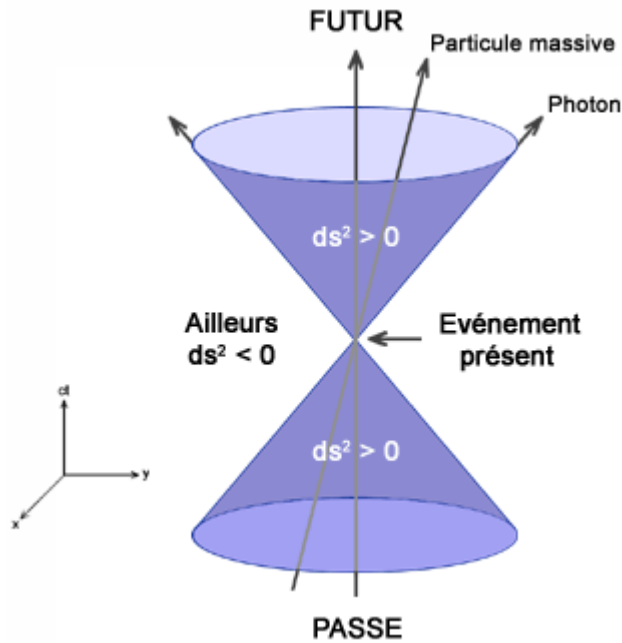


FIGURE 4.2 – Le cône de lumière en deux dimensions. Ce cône de lumière divise l'espace-temps en différentes régions. Si tous les événements sont situés à l'intérieur du cône de lumière,  $ds^2 > 0$ . L'intervalle entre deux événements est positif et sa composante temporelle domine sa composante spatiale. L'intervalle est du genre temps, de sorte qu'une particule ou un photon peut aller d'un événement à l'autre en vertu de la loi de causalité puisqu'il réside dans le même cône de lumière. Si la grandeur  $ds^2 < 0$ , l'intervalle est du genre espace et cela signifie que tous les événements sont situés à l'extérieur du cône de lumière. Etant donné que les événements ne peuvent plus être reliés entre eux par la particule, cette région est exclue de sa ligne d'univers. Cette région est dénommée l'ailleurs.

Les composantes d'un quadri-vecteur sont notées  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  dans un repère  $R$ . Dans  $R'$  elles deviennent  $(A'_0, A'_1, A'_2, A'_3)$  et la relation entre les deux est fournie par la transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct montre que :

$$A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = A_0'^2 - A_1'^2 - A_2'^2 - A_3'^2.$$

Considérons un autre quadri-vecteur dont les composantes sont  $(B_0, B_1, B_2, B_3)$ . Le produit scalaire au sens de Minkowski de ces deux quadri-vecteurs est donné par :

$$A \cdot B = A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3.$$

La forme la plus générale d'un produit scalaire de deux quadri-vecteurs peut s'écrire :

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} A_\mu B_\nu,$$

où  $g_{\mu\nu}$  est la métrique de l'espace-temps. La métrique de l'espace-temps de Minkowski utilisée en relativité restreinte est telle que :

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,$$

et  $g_{\mu\nu} = 0$  si  $\mu \neq \nu$ . On suppose que les coordonnées cartésiennes sont utilisées pour la partie spatiale. En coordonnées sphériques la forme serait différente.

Le produit scalaire peut s'écrire comme un double produit matriciel :

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} A_\mu B_\nu = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Nous allons voir comment construire des quadri-vecteurs à partir du quadri-vecteur position. Ils se caractérisent par des propriétés de transformation identiques dans un changement de repère.

### 4.3 Le quadri-vecteur vitesse

Les quantités  $cdt, dx, dy$  et  $dz$  sont les composantes d'un quadri-vecteur mais  $(c, dx/dt, dy/dt, dz/dt)$  n'est pas un quadri-vecteur. La première composante est invariante ce qui n'est pas le cas pour un quadri-vecteur. Par ailleurs les composantes de la vitesse ne se transforment pas comme celles d'un quadri-vecteur comme nous l'avons vu au chapitre précédent. La raison est que l'intervalle de temps  $dt$  n'est pas un invariant. En divisant chaque composante par  $dt$  on modifie donc les propriétés de transformation de l'ensemble des quatre grandeurs obtenues.

L'intervalle d'espace-temps pour deux événements proches s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

ou

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left( 1 - \frac{v_x^2 - v_y^2 - v_z^2}{c^2} \right) = c^2 dt^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

C'est une quantité invariante. Dans le repère propre de la particule elle s'écrit :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2,$$

où  $d\tau$  est l'intervalle de temps propre. On peut donc écrire :

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}.$$

Le facteur  $\gamma$  n'est pas lié à la transformation de Lorentz. Il ne dépend que de la vitesse de la particule dans le repère  $R$ .

En divisant les composantes du quadri-vecteur  $(cdt, dx, dy, dz)$  par  $d\tau$  on obtient un nouveau quadri-vecteur dont les composantes sont homogènes à une vitesse :

$$\left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z).$$

C'est le quadri-vecteur vitesse. On peut l'écrire également  $(\gamma c, \gamma \vec{v})$ . Le produit scalaire de ce quadri-vecteur par lui-même s'écrit :

$$\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v_x^2 - \gamma^2 v_y^2 - \gamma^2 v_z^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \gamma^2 (1 - v^2/c^2) = c^2.$$

Cette grandeur est manifestement invariante.

Dans le repère  $R'$  on définit de la même manière les composantes du quadri-vecteur vitesse dans  $R'$  :

$$(\gamma' c, \gamma' v_x, \gamma' v_y, \gamma' v_z)$$

où  $\beta' = v'/c$ , et  $\gamma' = 1/\sqrt{1 - \beta'^2}$ .

Si la vitesse relative des deux repères est  $V$ , on a  $\beta_L = V/c$ , et  $\gamma_L = 1/\sqrt{1 - \beta_L^2}$ . La relation entre les deux quadri-vecteurs s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_L & \beta_L \gamma_L & 0 & 0 \\ \beta_L \gamma_L & \gamma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' c \\ \gamma' v_{x'} \\ \gamma' v_{y'} \\ \gamma' v_{z'} \end{pmatrix}$$

## 4.4 Le quadri-vecteur énergie-impulsion

En mécanique newtonienne on définit l'impulsion  $\vec{p}$  (ou quantité de mouvement) par l'expression :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

où  $m$  est la masse de la particule. Si on multiplie chaque composante du quadri-vecteur vitesse par la masse propre de la particule on obtient un autre-quadri-vecteur dont les composantes sont :

$$(\gamma mc, \gamma mv_x, \gamma mv_y, \gamma mv_z)$$

Une extension naturelle au domaine relativiste est fournie par la formule :

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

Elle redonne la formule précédente lorsque  $v \ll c$ . Le quadri-vecteur obtenu en multipliant le quadri-vecteur vitesse par la masse propre a donc pour composantes spatiales l'impulsion relativiste. Il faut encore identifier la composante temporelle.

La puissance fournie à une particule soumise à une force  $\vec{F}$  est :

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = \frac{dE}{dt}$$

où  $E$  est l'énergie de la particule. La loi de Newton étendue au domaine relativiste permet d'écrire :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

soit :

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}$$

On en déduit :

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = m \vec{v} \cdot \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

A partir de la définition de  $\gamma$  on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} (1 - \beta^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2} (1 - \beta^2)^{-3/2} \left( -2\beta \frac{d\beta}{dt} \right) \\ &= \gamma^3 \beta \frac{d\beta}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} v \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Par ailleurs seule la composante de la force sur la direction de  $\vec{v}$  produit un travail et contribue à faire varier l'énergie de la particule. On peut donc écrire :

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = v \frac{dv}{dt}$$

où  $v = |\vec{v}|$ .

La puissance fournie peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{F} &= m v^2 \frac{\gamma^3}{c^2} v \frac{dv}{dt} + \gamma m v \frac{dv}{dt} \\ &= (\beta^2 \gamma^2 + 1) \gamma m v \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Or on a :

$$\gamma^2 \beta^2 + 1 = \gamma^2$$

On en déduit :

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = \gamma^3 m v \frac{dv}{dt}$$

On peut réécrire le membre de droite sous la forme :

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = m c^2 \gamma^3 \beta \frac{d\beta}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma m c^2) = \frac{dE}{dt}$$

Ce résultat conduit à définir l'énergie de la particule par l'expression :

$$E = \gamma m c^2$$

Le quadri-vecteur énergie-impulsion peut donc s'écrire :

$$(\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

Le produit scalaire d'un quadri-vecteur par lui-même étant un invariant on en déduit que la grandeur  $E^2/c^2 - p^2$  est la même dans tous les repères galiléens. Dans le repère propre de la particule  $p = 0$  et  $E_0 = mc^2$ . On en déduit :

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E_0^2}{c^2}$$

ou

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

On distingue deux cas limites :

- l'approximation non relativiste lorsque  $p^2 c^2 \ll m^2 c^4$
- l'approximation ultra relativiste lorsque  $p^2 c^2 \gg m^2 c^4$

Pour l'approximation non-relativiste on peut écrire :

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \left( 1 + \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2} \\ &\approx mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4} \right) \\ &= mc^2 + \frac{p^2}{2m} \end{aligned} \tag{4.3}$$

où  $p = \gamma mv \approx mv$  car  $v \ll c$ . L'énergie cinétique comprend tous les termes autres que  $mc^2$ .

L'énergie totale d'une particule libre est  $\gamma mc^2$ . Son énergie au repos étant  $mc^2$  on en déduit que son énergie cinétique est :

$$E_{cin} = (\gamma - 1)mc^2$$

Cette expression est exacte, quelle que soit la vitesse de la particule.

Un développement de Taylor de la fonction  $f(x) = (1+x)^{-1/2}$  donne :

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

En posant  $x = -\beta^2$  il vient :

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \frac{5}{16}\beta^6 + \dots$$

Le développement de l'énergie cinétique en puissances de  $\beta$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 E_{cin} &\approx mc^2 \left[ \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \frac{5}{16} \beta^6 + \dots \right] \\
 &= mc^2 \left[ \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{4} \beta^2 \frac{\beta^2}{2} + \frac{5}{8} \beta^4 \frac{\beta^2}{2} + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{2} mv^2 \left[ 1 + \frac{3}{4} \beta^2 + \frac{5}{8} \beta^4 + \dots \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Lorsque  $\beta \ll 1$  on retrouve bien l'expression familière de la mécanique classique.

## 4.5 Le quadri-vecteur d'onde

Une onde se déplaçant dans l'espace à trois dimensions peut être représentée par la fonction :

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

La surface d'onde est le lieu des points pour lesquels la phase est constante à un instant donné. Après un déplacement  $\Delta\vec{r}$  la phase devient :  $\omega t - \vec{k} \cdot (\vec{r} + \Delta\vec{r})$ . Elle reste constante à un instant donné si  $\vec{k} \cdot \Delta\vec{r} = 0$ . Il faut donc se déplacer perpendiculairement au vecteur d'onde pour garder la phase constante. La surface d'onde est donc perpendiculaire à  $\vec{k}$  et la fonction considérée représente une onde plane.

Pour suivre une crête la phase doit rester constante. Le déplacement doit être tel que :

$$\omega dt - \vec{k} \cdot d\vec{r} = 0$$

soit

$$\omega - \vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

La vitesse à laquelle il faut se déplacer est la vitesse de phase. Si le déplacement est dans la direction du vecteur d'onde la vitesse de phase est :

$$c = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \frac{\omega}{k}$$

L'onde se propage dans la direction de  $\vec{k}$ , c'est à dire perpendiculairement à la surface d'onde.

Les ondes produites par deux sources peuvent interférer. C'est la différence de phase qui détermine l'éclairement en un point. Si un observateur

observe une interférence destructive en un point un autre observateur en mouvement par rapport à lui fera la même observation. Cela s'explique facilement si la phase est un invariant de Lorentz.

La phase est invariante dans un changement de repère si on peut l'écrire comme un produit scalaire de deux quadri-vecteurs. L'un de ces quadri-vecteurs est le quadri-vecteur position  $(ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$  et l'autre est le quadri-vecteur d'onde  $(\omega/c, k_x, k_y, k_z) = (\omega/c, \vec{k})$ .

La transformation de ses composantes est la même que pour tout quadri-vecteur :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_{x'} \\ k'_{y'} \\ k'_{z'} \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire du quadri-vecteur d'onde par lui-même est le même dans tous les repères inertiels. La quantité  $(\omega^2/c^2 - k^2)$  est donc invariante. Pour une onde plane elle est nulle et

$$\omega = ck$$

dans tous les repères.

## 4.6 L'effet Doppler

Considérons une source au repos dans le repère  $R'$  qui joue donc le rôle de repère propre de la source. La fréquence propre de la source est  $\nu'$  de sorte que sa pulsation propre est  $\omega' = 2\pi\nu'$ . Cette onde est dirigée vers un observateur immobile dans  $R$ . On dit que l'effet Doppler est longitudinal si l'onde arrive dans la direction du mouvement relatif et qu'il est transversal si elle arrive dans une direction perpendiculaire au mouvement relatif.

### 4.6.1 Effet Doppler longitudinal

La source au repos dans  $R'$  émet une onde dans le sens négatif de l'axe des  $x$ . Le vecteur d'onde dans le repère propre de la source a pour composantes :

$$k'_{x'} = -k' \qquad k'_{y'} = 0 \qquad k'_{z'} = 0$$

Fig. p. 75

La transformation de Lorentz permet d'obtenir les composantes du quadrvecteur d'onde dans le repère du laboratoire ( $R$ ) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_{x'} \\ k'_{y'} \\ k'_{z'} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} &= \gamma \frac{\omega'}{c} + \beta\gamma(-k') \\ k_x &= \beta\gamma \frac{\omega'}{c} + \gamma(-k') \\ k_y &= 0 \\ k_z &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

La relation de dispersion dans le repère propre de la source s'écrit :

$$\omega' = ck'$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \omega &= \gamma\omega' + \beta\gamma(-\omega') \\ &= \gamma(1 - \beta)\omega' \\ \frac{\nu}{\nu'} &= \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Cette relation donne la fréquence reçue dans le repère du laboratoire en fonction de la fréquence propre d'une source que s'éloigne. Pour une source s'approchant du détecteur il faudrait changer  $\beta$  en  $-\beta$ . La longueur d'onde mesurée  $\lambda$  est liée à la longueur d'onde propre par la relation :

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda'$$

Elle est plus grande que la longueur d'onde propre si la source s'éloigne.

Pour une onde mécanique il fallait distinguer le mouvement de la source et le mouvement de l'observateur car le milieu qui assure la propagation de l'onde joue le rôle de référentiel au repos absolu. Lorsque la source et l'observateur s'éloignent avec une vitesse très inférieure à celle de l'onde la fréquence mesurée est donnée par :

$$\nu = \nu' \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Dans le cas d'une onde électromagnétique on trouve pour  $v \ll c$  :

$$\begin{aligned}\nu &= \nu' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \nu'(1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2} \\ &\approx \nu'(1-\beta/2)(1-\beta/2) \\ &\approx \nu'(1-\beta)\end{aligned}\tag{4.7}$$

### 4.6.2 Effet Doppler transversal

L'effet Doppler transversal lorsque l'onde est reçue dans une direction perpendiculaire au mouvement de la source. C'est une manifestation de la dilatation des durées qui n'a pas de correspondant dans les ondes mécaniques. La source est immobile dans  $R'$  et l'observateur est immobile dans  $R$ . Il reçoit la lumière dans la direction de l'axe des  $y$  :

Fig. p. 77

Le quadrivecteur d'onde dans le repère du laboratoire est  $(\omega/c, 0, k_y, 0)$ . Dans le repère propre de la source ( $R'$ ) la composante  $z'$  est nulle. La transformation de Lorentz permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_{x'} \\ k'_{y'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{c} &= \gamma \frac{\omega'}{c} + \beta\gamma k'_{x'} \\ 0 &= \beta\gamma \frac{\omega'}{c} + \gamma k'_{x'}\end{aligned}\tag{4.8}$$

Cette dernière relation permet d'écrire :

$$k'_{x'} = -\beta \frac{\omega'}{c}$$

En substituant dans la première elle vient :

$$\frac{\omega}{c} = \gamma \frac{\omega'}{c} - \beta^2 \gamma \frac{\omega'}{c}$$

soit :

$$\omega = \gamma(1 - \beta^2)\omega' = \sqrt{1 - \beta^2}\omega'$$

ou

$$\nu = \sqrt{1 - \beta^2} \nu'$$

La fréquence reçue dans le laboratoire est donc inférieure à la fréquence propre. La période d'oscillation est plus longue dans le repère propre de la source. C'est une manifestation de la dilatation du temps. C'est un effet typiquement relativiste qui n'existe pas avec les ondes mécaniques classiques.

### 4.6.3 Expérience de Ives et Stilwell

En 1907 Einstein a proposé de mesurer la longueur d'onde émise par une source dans la direction perpendiculaire à déplacement afin de mettre en évidence la dilatation du temps. La mesure est cependant très difficile car l'effet Doppler transversal est quadratique en  $v/c$  contrairement à l'effet longitudinal qui est linéaire.

Considérons le cas général où la lumière est reçue dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec l'axe des  $x$  dans le repère du laboratoire. La source est à l'origine  $O'$  du repère  $R'$ . Dans le repère du laboratoire les composantes du vecteur d'onde sont :

$$\begin{aligned} k_x &= k \cos \theta \\ k_y &= k \sin \theta \\ k_z &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Fig p. 79

La pulsation reçue est  $\omega$  alors que la pulsation propre est  $\omega'$ . En inversant la transformation de Lorentz on obtient les composantes du quadrivecteur d'onde dans le repère de la source :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_{x'} \\ k'_{y'} \\ k'_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k \cos \theta \\ k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La pulsation propre est donc :

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \frac{\omega}{c} - \beta\gamma k \cos \theta = \gamma \frac{\omega}{c} - \beta\gamma k \frac{\omega}{\omega} \cos \theta$$

En multipliant chaque terme par  $c$  il vient :

$$\omega' = \gamma(1 - \beta \cos \theta)\omega$$

La fréquence mesurée est donnée en fonction de la fréquence propre par la relation :

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} = \frac{\nu' \sqrt{1 - \beta^2}}{(1 - \beta \cos \theta)}$$

Pour  $\theta = 0$  la source s'approche de l'observateur et :

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \nu' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

Pour  $\theta = \pi$  la source s'éloigne de l'observateur et :

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} = \nu' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Pour  $\theta = \pi/2$  on retrouve l'effet Doppler transversal :

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \beta^2}$$

On voit que si  $\theta$  n'est pas exactement  $\pi/2$  il y aura une dépendance linéaire de la fréquence mesurée qui risque de perturber ou même masquer l'effet Doppler transversal.

Ives et Stilwell ont utilisé des atomes excités comme sources. Pour leur communiquer une grande vitesse ils ont accéléré des ions au moyen d'une différence de potentiel bien définie. Pour donner une ordre de grandeur, un proton accéléré par une différence de potentiel de 5 keV aura une vitesse de  $10^6$  m/s ce qui donne  $\beta = 1/300$ . On a alors  $\gamma - 1 \approx 5 \times 10^{-6}$ . Si l'atome émet à une longueur d'onde de 500 nm l'effet Doppler transversal produit  $\Delta\lambda \approx 0,0025$  nm ce qui est mesurable. Cependant si l'erreur sur la direction d'observation est de l'ordre de  $1^\circ$  l'effet Doppler longitudinal masque l'effet de la dilatation du temps.

Ives et Stilwell ont utilisé l'effet Doppler longitudinal pour mettre en évidence les effets de l'ordre de  $\beta^2$ . Soit  $\nu_1$  la fréquence mesurée lorsque la source s'approche du détecteur ( $\theta = 0$ ) et  $\nu_2$  celle qui est mesurée lorsqu'elle s'en éloigne. En négligeant la dilatation du temps on aurait :

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \nu'(1 + \beta) \\ \nu_2 &= \nu'(1 - \beta)\end{aligned}$$

En pratique on mesure plutôt les longueurs d'onde. On a alors :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\lambda'}{1 + \beta} \\ \lambda_2 &= \frac{\lambda'}{1 - \beta}\end{aligned}$$

Un développement limité au second ordre donne :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda'(1 - \beta + \beta^2 \dots) \\ \lambda_2 &= \lambda'(1 + \beta + \beta^2 \dots)\end{aligned}$$

La valeur moyenne de ces longueur d'onde est :

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\lambda'}{2}(2 + 2\beta^2) = \lambda'(1 + \beta^2)$$

Les corrections au premier ordre s'annulent mais les effets de second ordre conduisent à une moyenne différente de la longueur d'onde propre de la source. On a :

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda' \\ &= \lambda'\beta^2\end{aligned}\tag{4.10}$$

On peut également obtenir ce résultat de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} &= \lambda' \left( \frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 - \beta} \right) \\ &= \frac{\lambda'}{1 - \beta^2}\end{aligned}\tag{4.11}$$

Un développement limité au premier ordre en  $\beta^2$  redonne la formule obtenue. Le changement de longueur d'onde calculé était deux fois plus grand que celui mesuré.

Reprenons le calcul avec les formules relativistes exactes. On a

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \\ \lambda_2 &= \lambda' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\end{aligned}\tag{4.12}$$

On a

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\lambda'}{2} \left( \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \lambda'\gamma$$

Un développement limitée au premier ordre donne :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda' = \lambda'(\gamma - 1) \approx \lambda' \frac{\beta^2}{2}$$

Il se trouvait en bon accord avec l'expérience ce, confirment la dilatation des durées.

N.B. Ives et Stilwell ne croyaient pas à cette interprétation de la relativité.

## 4.7 Particle de masse nulle

Pour une particule de masse nulle la relation :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

se ramène à :

$$E = pc$$

Par nature elle est ultra-relativiste.

La relation

$$E = \gamma m c^2$$

permet d'écrire :

$$m = \frac{E}{c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Si la masse est nulle quelle que soit l'énergie on doit avoir  $v = c$ . De même si  $v = c$  on doit avoir  $m = 0$ . Une particule de masse nulle se déplace à la vitesse de la lumière et une particule qui se déplace à la vitesse de la lumière doit avoir une masse nulle si son énergie est finie.

Le quadrivecteur énergie impulsion peut s'écrire de deux façons équivalentes :

$$(\gamma m c, \gamma m \vec{v}) = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

On en déduit :

$$\frac{\gamma m |\vec{v}|}{\gamma m c} = \frac{|\vec{p}|}{E/c}$$

ou

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E}$$

Puisque  $E = pc$  on en déduit  $v = c$ .

## 4.8 Le photon

La répartition spectrale de l'énergie rayonnée par un corps chauffé posait un problème que la thermodynamique classique et l'électromagnétisme ne pouvait pas résoudre. En 1900 Planck a pu trouver une fonction qui reproduisait bien les données expérimentale mais avec une hypothèse implicite que la physique classique ne pouvait justifier. En effet, les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement devaient se faire par quanta dont l'énergie est proportionnelle à la fréquence.

En 1905 Einstein a émis l'hypothèse que l'énergie électromagnétique est elle-même quantifiée. Selon cette hypothèse l'énergie transportée par un faisceau de lumière est concentrée dans des grains localisés et insécables. Ils ont reçu plus tard le nom de photons. D'après Einstein l'énergie d'un photon est proportionnelle à la fréquence et la théorie électromagnétique de Maxwell est vérifiée statistiquement. L'énergie d'un photon est :

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

où  $h$  est la constante de Planck ( $6,626 \times 10^{-34}$  Js) et  $\hbar = h/2\pi$ . Le photon se déplaçant à la vitesse de la lumière est donc une particule de masse nulle.

L'hypothèse d'Einstein a rencontré une vive opposition pendant plus de 15 ans car elle était considérée comme incompatible avec le phénomène d'interférence de la lumière. Pour Einstein les aspects corpusculaire et ondulatoire sont essentiels pour interpréter l'ensemble des phénomènes lumineux. C'est ce que l'on appelle la dualité onde-corpuscule. Le fait que l'énergie et la fréquence se transforment de la même manière dans un changement de repère a sans doute joué un rôle important dans son cheminement.

En 1917 Einstein a proposé d'attribuer une impulsion au photon en plus de son énergie. En 1923 de Broglie a proposé d'étendre la dualité onde-corpuscule à l'ensemble des objets microscopiques. A chaque particule d'impulsion  $\vec{p}$  est associé une onde telle que :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

où  $h$  est la constante de Planck. On peut écrire l'impulsion sous la forme :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

ou, sous forme vectorielle :

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Cette relation a reçu de nombreuses confirmations expérimentales.

Le quadrivecteur énergie-impulsion et le quadrivecteur d'onde sont donc proportionnels et on peut écrire :

$$\left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \hbar \left( \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

## 4.9 Exercices

**Exer. 4-1** [C'est Exer. 1-5 de (French, 1968) .] On attend qu'un parapluie reçoive, pendant un jour sans nuage, assez d'énergie de la lumière solaire par

second de fournir l'énergie pour un lave-linge. Utiliser ce fait pour trouver le  $\tau$  dont le soleil perd la masse !

**Exer. 4-2** [C'est Exer. 1-10 de (French, 1968) .] Un réacteur nucléaire sphérique de masse  $10^{30}$  kg dans l'espace interstellaire est complètement entouré d'un coquille sphérique et mince de mass  $10^{26}$  kg, voir Fig. Le réacteur perd sa masse au tau  $10^{10}$  kg/sec par emission de radiation électromagnétique. (C'est une situation similaire d'une étoile.) La coquille sphérique absorbe complètement cette radiation. Si la refoulement subit par la coquille à cause de la radiation est en équilibre avec la force d'attraction gravitationnelle vers le réacteur, trouver le rayon  $R$ . *Indice : Considérer les forces sur un morceau de la coquille.*

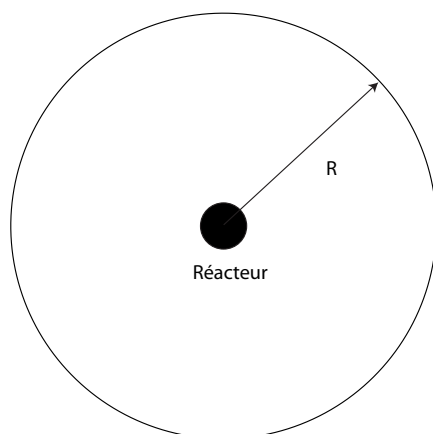


FIGURE 4.3 – Exer. 1-10 de



# Chapitre 5

## La Gravitation

- 5.1 L'interaction gravitationnelle
- 5.2 Principe d'équivalence
- 5.3 Décalage vers le rouge gravitationnel
- 5.4 Dilatation du temps
- 5.5 Notion de trou noir



# Bibliographie

French, A. P. 1968. *Special Relativity : The M.I.T. introductory physics series*. New York, London : W. W. Norton & Company.

Lachièze-Rey, Marc. 2008. *Au-delà de l'espace et du temps : La nouvelle physique*. Le Pommier.

Maudlin, Tim. 2012. *Philosophy of physics : space and time*. Princeton, NJ : Princeton University Press.