

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences & Techniques

L2 parcours Physique : Mécanique Quantique et Relativité
Partie : Relativité

Examen première session

mercredi 7 mai 2025, D016 : de 13h30 à 14h30

Documents interdits

Calculatrices autorisées mais déconseillées. (J'ai choisi les nombres de manière à ce que les calculs soient faciles.) Il y a un bonus de 1 pt si vous n'utilisez pas votre calculatrice et si vous montrez vos calculs. Bonne chance, bon courage!

1. (9pts) Deux référentiels, R et R' , chacun muni d'un système de coordonnées cartésiennes, sont en configuration standard avec la vitesse $v = \beta c$ entre les deux origines O et O' , où c est la vitesse de la lumière dans le vide. (Les origines O et O' coïncident à $t = t' = 0$, les axes sont alignés et O' se déplace à la vitesse v le long de l'axe des x .)
 - (a) (3pts) Ecrire la transformation de Lorentz qui donne les coordonnées (ct, x, y, z) de R d'un événement en fonction des coordonnées (ct', x', y', z') de R' . Ecrire la transformation en forme matricielle avec les paramètres β et γ . Préciser la formule pour γ en fonction de β .
 - (b) (1pt) Trouver la coordonnée x d'un événement avec coordonnées (ct', x', y', z') , en utilisant votre matrice de (a).
 - (c) (2pts) Supposer qu'il y a un 3e référentiel, R'' , muni d'un système de coordonnées cartésiennes, avec les axes alignés avec ceux de R et R' . Les origines O, O' et O'' coïncident à $t = t' = t'' = 0$, et O'' se déplace à la vitesse v' le long de l'axe des y . Attention : c'est bien y et pas x .) Ecrire en forme matricielle avec les paramètres β' et γ' la transformation de Lorentz pour trouver les coordonnées (ct'', x'', y'', z'') de R'' d'un événement avec en coordonnées (ct', x', y', z') dans R' .
 - (d) (2pts) Ecrire aussi la transformation pour trouver les coordonnées (ct'', x'', y'', z'') de l'événement en fonction des coordonnées (ct, x, y, z) .

- (e) (1pt) Trouver la coordonnée x'' d'un événement avec coordonnées (ct, x, y, z) .

Solution

- (a) (3pts)

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (1)$$

- (b) (1pt)

$$x = \beta\gamma ct' + \gamma x' \quad (2)$$

- (c) (2pt)

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (3)$$

- (d) (2pt)

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -\beta\gamma\gamma' & -\beta'\gamma' & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma'\gamma & -\beta'\gamma'\beta\gamma & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5)$$

- (e) (1pt) La coordonnée x'' d'un événement avec coordonnées (ct, x, y, z) :

$$x'' = -\beta\gamma ct + \gamma x \quad (6)$$

2. (7 pts) En exploitant l'IA, les chercheurs ont développé un train qui s'appelle un "SGV" (super-grande vitesse). On mesure, dans un référentiel de la gare, une longueur du train $L = 100\text{m}$ quand il est stationnaire à la gare.
- (a) (1pt) Quelle est la longueur "propre" du train ?
- (b) (1pt) Ecrire la formule pour la contraction des longueurs, et préciser quelle quantité dans la formule est propre et laquelle est impropre.
- (c) (2pts) On mesure que dans le référentiel de la terre, la longueur du train en mouvement est de 80 m. Trouver β , la vitesse du train en fraction de c .
- (d) (1pt) Ecrire la formule pour la dilatation du temps, et préciser quelle quantité, dans la formule, est propre et laquelle est impropre.
- (e) (1pt) Si un observateur, dans le référentiel de la terre, peut observer les horloges sur le train lorsqu'il est en mouvement à cette vitesse, est-ce qu'elles auront l'air de se ralentir ou de tourner plus vite ?
- (f) (1pt) Pour l'observateur dans le référentiel de la terre, par quel intervalle de temps l'horloge sur le train avance-t-elle pendant une seconde ?

Solution

- (a) (1pt) La longueur propre du train est $L = 100\text{m}$.
- (b) (1pt) Contraction de longueur :

$$L' = \frac{L}{\gamma} \quad (7)$$

où L est la longueur propre et L' est la longueur impropre.

- (c) (2pts) Le train est plus court lorsqu'il roule. Pour calculer la différence de longueur on utilise la formule de la contraction de longueur.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{L}{L'} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ 1 - \beta^2 &= \frac{4^2}{5^2} \\ \beta &= \pm \frac{3}{5}. \end{aligned} \quad (8)$$

Le train se déplace à $3/5$ fois la vitesse de la lumière.

(d) (1pt) Dilation de temps :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} \quad (9)$$

où Δt est la durée propre et $\Delta t'$ est la durée impropre.

(e) (1pt) Les horloges dans le train auront l'aire de se ralentir.

(f) (1pt) pendant une seconde pour l'observateur dans le référentiel de la terre, l'horloge sur le train avance par un increment de temps Δt

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} = \frac{1}{5/4} = 0,8s. \quad (10)$$

3. (4 pts) Supposons que nous avons trois particules, a , b et c . La vitesse de la particule b par rapport à la particule a s'écrit comme v_{ab} et la vitesse de la particule c par rapport à la particule b s'écrit comme v_{bc} etc.

(a) (1pt) Ecrire la formule pour la loi d'addition des vitesses d'Einstein pour la vitesse v_{ac} en fonction de la vitesse v_{ab} et v_{bc} .

(b) (1pt) Trouver la vitesse v_{ba} en fonction de la vitesse v_{ab} en utilisant le principe de réciprocité.

(c) (2pt) Supposons qu'il y a une enfant sur un train qui lance un ballon vers l'arrière du train (direction opposée du mouvement du train) avec la vitesse (par rapport à elle) d'un quart de la vitesse de la lumière. Si vous supposez que la terre est la particule a , le train est la particule b , et que le ballon est la particule c , vous pouvez utiliser votre formule en partie (a) ci-dessus. Trouvez la vitesse du ballon par rapport à la terre si la vitesse du train (par rapport à la terre) est de trois quarts de la vitesse de la lumière.

Solution :

(a) (1pt)

La loi de l'addition des vitesses d'Einstein,

$$v_{ac} = \frac{v_{ab} + v_{bc}}{1 + \frac{v_{ab}v_{bc}}{c^2}} \quad (11)$$

(b) (1pt) Réciprocité :

$$v_{ab} = -v_{ba} \quad (12)$$

(c) (2pts)

La loi de l'addition des vitesses d'Einstein,

$$\begin{aligned} v_{ac} &= \frac{v_{ab} + v_{bc}}{1 + \frac{v_{ab}v_{bc}}{c^2}} \\ &= \frac{\frac{3c}{4} - \frac{c}{4}}{1 - \frac{3c}{4} \frac{c}{4} \frac{1}{c^2}} \\ &= \frac{16}{13} \times \frac{1}{2}c, \\ &= \frac{8}{13}c. \end{aligned} \quad (13)$$