

Physique nucléaire et radioprotection pour la physique médicale

Dr. Robert B. Scott

Enseignant-chercheur à l'Université de Bretagne Occidentale

Fondateur de *The Unpaid Researchers Guild*

Table des matières

Table des matières	i
0 Présentation générale du cours	1
0.1 Le cours : Physique Atomique et Nucléaire	1
0.1.1 Informations clés	1
0.1.2 Calendrier	1
0.1.3 Programme	1

I	Physique Atomique, Nucléaire et Radioactivité	3
1	La physique des atomes à plusieurs électrons :	4
1.1	Sommaire du chapitre	4
1.2	L'atome	4
1.3	L'expérience de Rutherford en bref	5
1.4	La structure de l'atome : le système à décrire	5
1.5	Une description mathématique de l'atome polyélectronique . . .	6
1.5.1	Quelle équation ?	6
1.5.1.1	Effets Relativistes	6
1.5.1.2	Effets Quantiques	8
1.6	Théorie de Hartree (et Hartree–Fock)	9
1.6.1	Contexte et motivation	9
1.6.2	Hypothèses de base de la théorie de Hartree	10
1.6.3	Équation de Schrödinger effective	10
1.6.4	Procédure auto-cohérente de Hartree	11
1.6.4.1	Modélisation du potentiel central : Le Potentiel de Hellmann	12
1.6.5	Le principe de Pauli	12
1.6.6	Résultats physiques de la théorie de Hartree-Fock	13
1.6.6.1	Résultat 1 : contraction des couches internes	13
1.6.6.2	Résultat 2 : énergies très négatives des couches internes	13
1.6.6.3	Résultat 3 : écrantage des couches externes	13
1.6.6.4	Résultat 4 : énergie des électrons de valence	13
1.6.6.5	Résultat 5 : dépendance en n et l	13
1.6.6.6	Atomes polyélectroniques et capacité des sous- couches	16
1.6.7	Lien avec la classification périodique	16
1.6.8	En bref	17
2	Modèles Nucléaires	18
2.1	L'importance de la masse et son interprétation	18
2.1.1	Un exemple pour clarifier l'interprétation de la masse	19
2.1.2	La masse fournit une information sur l'énergie de liaison du noyau	20
2.1.3	Masse et énergie de liaison : aperçu	20
2.2	Propriétés phénoménologiques des noyaux atomiques	21
2.2.1	Observations générales	21
2.2.2	Conséquences pour la stabilité du noyau	21

2.2.3	Moment angulaire total du noyau (spin nucléaire)	22
2.3	Densité nucléaire	24
2.3.1	Comment étudier le noyau ?	24
2.3.2	Densité nucléaire approximativement constante	24
2.4	Le Modèle de la Goutte Liquide	25
2.4.1	Motivation et idée générale	25
2.4.2	Hypothèses physiques du modèle	25
2.4.3	Formule semi-empirique de la masse	26
2.4.3.1	Terme de volume	26
2.4.3.2	Terme de surface	27
2.4.3.3	Terme coulombien	27
2.4.3.4	Terme d'asymétrie	27
2.4.3.5	Terme d'appariement	27
2.4.4	Conséquences physiques majeures	28
2.4.4.1	Stabilité nucléaire	28
2.4.4.2	Énergie de liaison du dernier neutron	30
2.4.4.3	Fission nucléaire	30
2.4.5	Portée et limites du modèle	30
2.4.6	En bref	30
2.5	Nombres magiques et modèle en couches	31
2.5.1	Motivation : limites du modèle de la goutte liquide	31
2.5.2	Observation des nombres magiques	31
2.5.3	Analogie avec les couches électroniques	32
2.5.4	Premiers modèles en couches et difficultés	32
2.5.5	Rôle crucial du spin	32
2.5.6	Conséquence sur les nombres magiques	32
2.5.7	Complémentarité des deux approches	33
2.5.8	Perspective	33
3	Réactions nucléaires et la radioactivité	34
3.1	Portée et motivation	34
3.1.1	Radioactivité	34
3.1.2	Réactions nucléaires	37
3.2	Désintégration Alpha	37
3.2.1	Énergétique de la désintégration α	37
3.2.2	Taux de désintégration spontanée	38
3.2.3	Dynamique des populations : Filiation radioactive	40
3.2.3.1	Le système d'équations différentielles	40
3.2.3.2	Solution générale	40
3.2.3.3	Étude des limites intéressantes	40

3.2.4	Les quatre chaînes de désintégration naturelle	41
3.2.4.1	Description des quatre séries	42
3.2.4.2	Cartographie d'une filiation : La série du Thorium	42
3.2.4.3	Le concept de branchement (Bifurcation)	43
3.2.5	Conséquence sur la chaîne de désintégration	43
3.2.6	Remarques de synthèse sur la désintégration alpha	44
3.2.6.1	Pourquoi une particule alpha ?	44
3.2.6.2	Et les particules plus lourdes ?	45
3.3	Désintégration bêta	45
3.3.1	Énergétique de la désintégration bêta	45
3.3.2	Deux mécanismes qui réduisent Z : β^+ et la capture électronique (EC)	46
3.3.3	Compétition entre émission de positon et capture électronique	47
3.3.4	Le mystère de l'énergie et l'invention du Neutrino	48
3.3.5	Le « remède désespéré » de Wolfgang Pauli	48
3.3.6	La double parabole des masses et les isobares stables	49
3.3.6.1	Le cas des A impairs	49
3.3.6.2	Le cas des A pairs : la double parabole	49
3.4	Désintégration Gamma	50
3.4.1	Nature et origine de l'excitation	50
3.4.2	Énergétique et Recul	51
3.4.3	Conversion Interne : Une alternative à l'émission γ	51
3.4.4	Isométrie nucléaire	51
4	Réactions nucléaires	53
4.1	Introduction	53
4.2	Réaction nucléaire générale	53
4.3	Lois de conservation dans les réactions nucléaires	53
4.4	Définition de la valeur Q	57
4.5	Lois de conservation	58
4.5.1	Conservations toujours valables	58
4.5.2	Autres lois	58
4.6	Définition de la parité	58
4.7	Exemple : première réaction nucléaire artificielle (Rutherford)	59
4.7.1	Analyse	59
4.7.1.1	Mesure expérimentale	59
4.7.1.2	Dérivation de l'équation (15-16) de Eisberg et Resnick	60
4.8	Cas particulier : $\theta = 90^\circ$	62

4.9	Conclusion	63
II	Applications médicales	64
5	La physique médicale	65
5.1	Le physicien médicale	65
5.2	Comment devenir physicien médicale	65
5.2.1	Educational requirements.	65
5.2.2	Comment devenir physicien médicale en France	66
5.2.3	Comment devenir physicien médicale à l'internationale :	66
	Bibliographie	67

Chapitre 0

Présentation générale du cours

0.1 Le cours : Physique Atomique et Nucléaire

0.1.1 Informations clés

- **Enseignant** : Robert Scott (robert.scott@univ-brest.fr)
- **MCC (Modalités de Contrôle des Connaissances)** : Un examen écrit de deux heures (100 % de la note). Les exercices de l'examen portera sur les exercices vus en TD.

0.1.2 Calendrier

- **CM (Cours Magistraux)** : 12 heures, une semaine sur deux.
Dates : 5/01, 19/01, 2/02, (vacances d'hiver), 2/03, 16/03, 30/03.
- **TD (Travaux Dirigés)** : 12 heures, une semaine sur deux (en alternance avec les CM).
Dates : 12/01, 26/01, 9/02, (vacances d'hiver), 11/03, 24/03 (heure exceptionnelle : 10h15–12h15), (lundi de Pâques), 7/04.

0.1.3 Programme

1. Partie I : Physique atomique et nucléaire

- Les atomes polyélectroniques (avec rappels de physique quantique et relativiste).
- Modèles du noyau.
- Réactions nucléaires et radioactivité.

2. Partie II : Applications à la physique médicale

- La dosimétrie.

- Les méthodes de Monte-Carlo.
- Autres sujets selon vos intérêts.

Pourquoi étudier la physique nucléaire et la radioactivité ?

Félicitations d'avoir choisi cette option : elle enrichira votre culture scientifique, répondra à votre curiosité et servira votre future carrière.

Voici pourquoi ce cours est essentiel :

Le noyau atomique représente aujourd'hui l'une des **frontières de notre connaissance**.

La physique nucléaire est un domaine central et vivant de la physique fondamentale. Il reste encore de grands mystères à découvrir.

- Si vous souhaitez travailler dans la recherche fondamentale (physique nucléaire, astrophysique), la maîtrise de ces bases est indispensable.
- Si vous travaillez dans d'autres domaines de la physique, ce cours vous permettra d'apprécier les développements majeurs et la structure intime de la matière.

Parallèlement, après des décennies de recherche avec les réacteurs nucléaires et les accélérateurs de particules, la physique nucléaire est devenue un domaine **mûr**, reposant sur un socle de connaissances vaste et solide.

Si vous êtes davantage attiré par l'utilisation de la physique au service de la société, la physique nucléaire offre des applications concrètes :

- La physique médicale (imagerie, radiothérapie).
- La production d'énergie décarbonée.
- Des applications variées dans l'industrie et la recherche appliquée.

Dans ce cours, nous nous concentrerons particulièrement sur la **physique médicale**, car c'est là que se trouvent la majorité des opportunités professionnelles actuelles pour les physiciens.

ENQUÊTE EMPLOI DES JEUNES PHYSICIENS MÉDICAUX EN FRANCE (2022-2024)

« L'employabilité des physiciens médicaux en France se révèle être un enjeu crucial, notamment en raison d'un déséquilibre marqué entre l'offre et la demande sur le marché du travail. En effet, la demande pour ces spécialistes, particulièrement dans les hôpitaux et les centres de traitement du cancer, dépasse actuellement le nombre de physiciens médicaux diplômés. »

Source : <https://www.sfpm.fr/document/enquete-emploi-des-jeunes-physiciens-medicaux-en-france-2022-2024/>

Première partie

Physique Atomique, Nucléaire et
Radioactivité

Chapitre 1

La physique des atomes à plusieurs électrons :

1.1 Sommaire du chapitre

Prérequis : Je suppose que vous maîtrisez la mécanique quantique non-relativiste et son application à l'atome à un seul électron ($Z = 1$, hydrogène).

Je suppose également que vous connaissez les résultats importants de la relativité restreinte.

Sujets abordés :

- Rappels de physique quantique et relativiste.
- Les composants des atomes multi-électroniques : les électrons et le noyau (dimensions, propriétés physiques).
- Comment déterminer si la relativité est importante ?
- Comment déterminer si la mécanique quantique est importante ?
- Comment identifier l'équation applicable ?
- Le principe d'exclusion de Pauli.
- Comment résoudre une équation complexe ? (L'approximation de Born-Oppenheimer, l'approximation de Hartree-Fock.)
- Le tableau de Mendeleïev.

1.2 L'atome

- Les spéculations anciennes sur l'existence des atomes furent confirmées par les chimistes au début du XIX^e siècle.

- J.J. Thomson, à la fin du XIX^e siècle, découvre l'électron, ce qui brise l'idée d'un atome indivisible.
- E. Rutherford (1911) a réalisé ses expériences célèbres sur la structure du noyau, mettant en évidence un noyau environ 10^5 fois plus petit que l'atome. Le noyau possède une charge $+Ze$, où Z est un nombre entier et e est la valeur absolue de la charge élémentaire. Ce noyau est entouré de Z électrons qui assurent la neutralité électrique de l'ensemble.

1.3 L'expérience de Rutherford en bref

- Il exploite les particules alpha, dont il a identifié la nature. Il s'agit de noyaux d'hélium (He). (Rappelez-vous, nous savons aujourd'hui que le noyau de ${}^4_2\text{He}$ est constitué de 2 protons et 2 neutrons.)
- Les particules alpha étaient produites par une source radioactive, polonium-214, qui produisait les particules alpha d'environ 5 MeV.
- Un faisceau de particules alpha est obtenu en utilisant des collimateurs.
- Le faisceau est dirigé vers une feuille métallique la plus mince possible (feuille d'or).
- Les particules alpha sont détectées par un écran de sulfure de zinc. Ce sel produit des scintillations lorsqu'il y a un impact de particule alpha.

1.4 La structure de l'atome : le système à décrire

Un atome consiste, à première vue :

- En un ensemble de $Z \in \mathbb{N}$ électrons, chacun de charge $-e$ et de moment angulaire $\hbar/2$, qui tournent autour d'un noyau.
- L'électron est considéré comme une particule élémentaire et ponctuelle ; c'est-à-dire sans taille connue ou détectable (même s'il possède une longueur d'onde de De Broglie).
- L'électron est très léger, $m_e \simeq 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 5,5 \times 10^{-4} \text{ u}$, soit environ 1/1837 fois la masse d'un proton.
- L'électron possède un moment angulaire intrinsèque, appelé spin, de valeur $s = 1/2$ (en unités de \hbar) ; il s'agit donc d'un fermion.
- Le noyau est de charge $+Ze$ et de masse d'environ $A \text{ u}$. (On rencontre aussi les notations u, Da ou amu pour l'unité de masse unifiée.)
- La raison pour laquelle la masse n'est pas précisément $A \text{ u}$ sera abordée dans le chapitre 2.
- Le noyau a un rayon de l'ordre de quelques fm ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

- Le noyau possède aussi un moment angulaire intrinsèque (spin), qui est soit demi-entier (unités de \hbar) s'il s'agit d'un fermion, soit entier s'il s'agit d'un boson.
- Les électrons et le noyau constituent un système lié par l'interaction électrostatique. Les interactions entre les spins et les moments angulaires orbitaux perturbent les niveaux d'énergie, mais ces effets ne constituent qu'une petite correction par rapport à l'énergie de liaison électrostatique et la répulsion entre électrons.

1.5 Une description mathématique de l'atome polyélectronique

La physique est la plus fondamentale de toutes les sciences. Nous décrivons la nature avec des modèles mathématiques précis.

1.5.1 Quelle équation ?

Comment décrire ce système de façon quantitative ?

La première question à aborder est : quelle théorie, quelle équation peut-on utiliser ?

En particulier, peut-on utiliser la mécanique classique ?

Les effets relativistes sont-ils importants ?

Les effets quantiques sont-ils importants ?

1.5.1.1 Effets Relativistes

Les effets de la relativité restreinte deviennent importants lorsque la vitesse relative entre les corps, v , s'approche de la vitesse de la lumière c .

L'effet le plus important pour nous concerne l'énergie totale relativiste, E , d'une particule de masse m qui s'exprime :

$$E = \gamma mc^2 \quad (1.1)$$

où m est la masse au repos¹, c est la vitesse de la lumière dans le vide et γ est le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.2)$$

1. Dorénavant, je ne parlerai plus de « masse au repos » ; il est sous-entendu que l'on ne parle que de la masse propre. Seuls les ouvrages anciens parlaient de la masse impropre, γm .

Quand $v^2 \ll c^2$, un développement limité nous donne :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right). \quad (1.3)$$

Si l'on substitue ce développement limité pour le facteur de Lorentz dans l'équation de l'énergie totale relativiste :

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \quad (1.4)$$

On voit que l'énergie totale relativiste E s'exprime comme l'énergie de masse au repos (on dit « l'énergie de masse » tout court) plus l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}mv^2$, ce qui est une bonne approximation pour des vitesses bien inférieures à celle de la lumière.

On observe que les effets relativistes sont faibles lorsque l'énergie cinétique est négligeable devant l'énergie de masse.

Dans l'atome multi-électronique de grand Z Nous allons voir que l'un des résultats de la théorie de Hartree-Fock est que, pour un atome de numéro atomique $Z > 2$, le rayon caractéristique \bar{r}_Z (je dis « caractéristique » car les électrons n'ont pas d'orbite classique mais plutôt des orbitales) d'un électron dans son état fondamental (nombre quantique principal $n = 1$) est relié à celui de l'hydrogène \bar{r}_H par :

$$\bar{r}_Z = \bar{r}_H \frac{1}{Z - 2} \quad (1.5)$$

L'effet d'écrantage par tous les autres électrons d'un atome polyélectronique réduit la charge ressentie par un électron proche du noyau de $+Ze$ à $+(Z - 2)$; un résultat étonnamment simple pour tous les atomes $Z > 2$.

Cela implique, pour l'énergie potentielle V et aussi pour l'énergie totale E :

$$E = (Z - 2)^2 E_H \simeq (Z - 2)^2 13,6 \text{ eV}. \quad (1.6)$$

On suppose que $T \sim V \sim E$. (J'utilise le symbole \sim pour indiquer « du même ordre de grandeur ».)

Pour que les effets relativistes soient faibles, on demande que :

$$T \sim V \sim E \simeq (Z - 2)^2 13,6 \text{ eV} \ll m_e c^2 \simeq 511 \text{ keV}. \quad (1.7)$$

On trouve que pour $Z = 64$, $E \approx 10\% m_e c^2$ où $m_e c^2 \simeq 511 \text{ keV}$. Gd est l'élément avec $Z = 64$; c'est un Lanthanide.

Pour éviter les effets relativistes, surtout pour les électrons avec un petit n , il faut rester bien en dessous de $Z = 64$.

Sinon, pour $Z \gtrsim 64$, on anticipe que les effets relativistes seront importants, au moins pour les électrons de cœur. C'est l'équation de Dirac qui décrit les particules relativistes dans un système quantique. C'est la théorie quantique des champs qui décrit les champs quantiques relativistes.

Fait intéressant : si l'on fait le calcul pour $Z = 99$, on trouve $E \approx mc^2/4$. Cela implique que l'électron de cœur a une vitesse égale à la moitié de celle de la lumière. L'élément $Z = 99$ s'appelle l'Einsteinium.

1.5.1.2 Effets Quantiques

Bien sûr, on va traiter l'atome polyélectronique avec la mécanique quantique. Historiquement, l'étude de l'hydrogène et les limites du modèle semi-classique de l'atome proposé par Niels Bohr ont joué un rôle important dans le développement de la mécanique quantique. Nous anticipons des niveaux d'énergies quantifiés (et non continus comme prévus par la mécanique classique) pour l'atome polyélectronique.

Mais, toujours dans l'esprit de comprendre la nature de la façon la plus fondamentale possible, nous posons la question : comment sait-on qu'il faut une description quantique ? Y aura-t-il aussi des effets quantiques pour le noyau ?

Il n'est pas toujours évident de savoir quand les effets quantiques seront importants.

Un critère pour qu'un système montre des effets quantiques est que son action S ne soit pas très supérieure à \hbar .

Rappelez-vous, l'action est la quantité dont on cherche l'extremum en mécanique lagrangienne. Elle a les mêmes dimensions que \hbar et pour ordre de grandeur :

$$S \sim pL \sim Et \tag{1.8}$$

où toutes les valeurs sont des ordres de grandeur typiques du système : p est la quantité de mouvement, L est la longueur, E est l'énergie et t est le temps.

Les électrons d'un atome sont quantiques Pour un électron de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental, on a $E = 13,6$ eV. Si l'on utilise $T \sim E$, on trouve $v \approx 2,2 \times 10^6$ m/s et $p \approx 2 \times 10^{-24}$ kg m/s. Pour $L = 0,1$ nm, on a $S \approx 2 \times 10^{-34}$ Js, ce qui est du même ordre que $\hbar \simeq 1,05 \times 10^{-34}$ Js.

En utilisant l'énergie et la période d'une orbite, on arriverait à la même conclusion.

En utilisant la relation de Planck-Einstein, on a la longueur d'onde de De Broglie, λ :

$$S \sim pL \implies L \sim \lambda = \frac{h}{p} \quad (1.9)$$

Les effets quantiques sont importants quand la longueur caractéristique du système s'approche de la longueur d'onde de De Broglie.

Ou encore, inspiré par notre discussion pendant le cours majistral, je propose que l'on puisse dire aussi : quand l'incertitude de nos mesures de p et L est bien supérieure aux limites imposées par l'inégalité de Heisenberg, $\Delta p \Delta L > \hbar$, les effets quantiques ne sont pas importants. Par contre, lorsque la précision de nos mesures devient telle que l'on s'approche de $\Delta p \Delta L \sim \hbar$, on attend des effets quantiques.

Le noyau d'un atome est quantique aussi Le noyau d'un atome d'hydrogène doit avoir la même quantité de mouvement (mais de sens opposé) que son électron. D'après l'argument ci-dessus, le noyau aurait une longueur d'onde de De Broglie d'un ordre de grandeur similaire à celle des électrons. Il peut être tout aussi quantique que l'électron !

Cependant, parce que l'énergie cinétique du noyau est très inférieure à celle des électrons (à cause de sa masse élevée), on peut négliger ce terme dans l'équation de Schrödinger. Cette approximation s'appelle « l'approximation de Born-Oppenheimer » dans la théorie quantique des molécules. Nous justifierons cette approximation rigoureusement dans le TD 1.

1.6 Théorie de Hartree (et Hartree–Fock)

1.6.1 Contexte et motivation

- Pendant le TD, nous allons démontrer (nous avons démontré) que l'équation de Schrödinger pour un atome à plusieurs électrons ($Z > 1$) s'exprime ainsi :

$$\sum_{i=1}^Z \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_i^2 + \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_i} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^Z \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)} \right) \right) \Psi_T = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_T. \quad (1.10)$$

Ici, Ψ_T est la fonction d'onde de un atome à plusieurs électrons, qui se factorise sous la forme $\Psi_T = \Psi_T(\{\vec{r}_i\}) \exp(-iE_T t/\hbar)$ car le Hamiltonien

(l'opérateur figurant au membre de gauche) ne dépend pas du temps. On appelle $\Psi_T(\{\vec{r}_i\})$ la fonction propre, une fonction de l'ensemble des positions de tous les électrons, indiqué par $\{\vec{r}_i\}$, indépendante du temps. Nous avons négligé les interactions entre le spin de l'électron, le moment angulaire orbital, le spin du noyau et autres effets relativistes qui sont de l'ordre $O(v^2/c^2)$.

- Le facteur $\frac{1}{2}$ devant le potentiel des interactions électron-électron prend en compte le fait que chaque paire est comptée deux fois (une fois avec les indices (i, j) et une deuxième fois avec (j, i)).
- À cause de ce terme d'interaction électron-électron, on ne peut pas trouver une solution directe. En effet, il faut connaître la distribution des électrons pour évaluer ce potentiel et résoudre l'équation!
- La stratégie générale consiste à introduire des *approximations successives*, en traitant d'abord les interactions dominantes.
- L'idée centrale de Hartree est de remplacer les interactions complexes entre électrons par un potentiel moyen auto-cohérent.

1.6.2 Hypothèses de base de la théorie de Hartree

- Chaque électron se déplace indépendamment dans un potentiel central sphériquement symétrique $V(r)$. (Ceci est critique pour avoir une fonction d'onde qui se factorise de la même manière que celle de l'hydrogène et donc qui résulte des mêmes nombres quantiques familiers : n, ℓ, m_ℓ .)
- Ce potentiel est la somme :
 - de l'attraction coulombienne du noyau $+Ze$,
 - d'un potentiel répulsif moyen représentant l'effet des $Z - 1$ autres électrons (traité comme il est sphérique aussi).
- L'équation de Schrödinger (1.10) se sépare en Z équations à une particule.

1.6.3 Équation de Schrödinger effective

Pour un électron typique :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\psi_i(\vec{r}_i) + V(r)\psi_i(\vec{r}_i) = E_i\psi_i(\vec{r}_i)$$

où E_i est l'énergie de cet électron d'indice i .

Nous allons justifier (avons justifié!) dans le TD1 que la fonction propre pour tous les électrons, ψ_T , est le produit de toutes les Z fonctions propres ψ_i ,

$$\psi_T = \prod_{i=1}^Z \psi_i(\vec{r}_i), \quad (1.11)$$

et que l'on a aussi :

$$\begin{aligned}\Psi_T &= \psi_T \exp(-iE_T t/\hbar), \\ &= \prod_{i=1}^Z \Psi_i, \\ &= \prod_{i=1}^Z \exp(-iE_i t/\hbar) \psi_i(\vec{r}_i),\end{aligned}\tag{1.12}$$

car $E_T = \sum_{i=1}^Z E_i$. C'est génial, non !

NB J'écris la norme du vecteur \vec{r} comme $r = \|\vec{r}\|$.

— Le potentiel $V(r)$ n'est pas connu a priori.

— Il doit être déterminé par une procédure auto-cohérente (self-consistent).

1.6.4 Procédure auto-cohérente de Hartree

1. Choix initial d'un potentiel $V(r)$, tel que :

— $V(r) \sim -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ pour $r \rightarrow 0$,

— $V(r) \sim -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ pour $r \rightarrow \infty$,

et une interpolation raisonnable pour r intermédiaire (voir § 1.6.4.1 ci-dessous).

2. Résolution numérique de l'équation de Schrödinger pour ce potentiel.

3. Remplissage des niveaux électroniques selon le principe d'exclusion de Pauli (forme faible : un électron par état quantique).

4. Calcul de la densité de charge électronique totale.

5. Détermination d'un nouveau potentiel $V(r)$ par la loi de Gauss.

6. Itération jusqu'à convergence : $V(r)$ devient auto-cohérent.

Quelques mots sur l'idée de remplissage des niveaux électroniques

On remplit d'abord le niveau d'énergie le plus bas. Chaque niveau possède une certaine dégénérescence, même si, dans les atomes polyélectroniques, les niveaux correspondant à des valeurs différentes de ℓ ne sont plus dégénérés. On remplit un niveau jusqu'à sa capacité maximale. Comment déterminer cette capacité ? Voir le rappel « Atomes polyélectroniques et capacité des sous-couches » ci-dessous, § 1.6.6.6.

1.6.4.1 Modélisation du potentiel central : Le Potentiel de Hellmann

Pour modéliser le potentiel moyen $V(r)$ ressenti par un électron de valence, il est courant d'utiliser une fonction d'interpolation qui respecte les limites asymptotiques physiques.

On introduit une charge effective $Z_{\text{eff}}(r)$ qui varie avec la distance :

$$V(r) = -\frac{Z_{\text{eff}}(r)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.13)$$

Une forme analytique simple et physiquement justifiée (basée sur la décroissance exponentielle des densités électroniques) est donnée par l'approximation de Hellmann :

$$Z_{\text{eff}}(r) = 1 + (Z - 1)e^{-\alpha r} \quad (1.14)$$

où α est un paramètre d'ajustement lié à la taille caractéristique du cœur atomique (la longueur d'écrantage) et de l'ordre $(1/a_0)$ où a_0 est la rayon de Bohr.

- **Pour** $r \rightarrow 0$: $e^{-\alpha r} \rightarrow 1$, donc $Z_{\text{eff}} \rightarrow Z$. L'électron ressent toute l'attraction du noyau.
- **Pour** $r \rightarrow \infty$: $e^{-\alpha r} \rightarrow 0$, donc $Z_{\text{eff}} \rightarrow 1$. Le potentiel devient coulombien pour une charge nette de $+e$ (l'atome neutre moins l'électron de valence).

1.6.5 Le principe de Pauli

La condition forte du principe de Pauli Le principe de Pauli exige que la fonction d'onde du système soit antisymétrique par rapport à l'échange de fermions identiques (et symétrique par rapport à l'échange de bosons identiques). Les électrons, de spin intrinsèque un demi, sont bien entendu des fermions. Cependant, il serait très difficile de construire des solutions obéissant à cette condition forte du principe de Pauli.

La condition faible du principe de Pauli Deux fermions identiques ne peuvent pas occuper simultanément le même état quantique individuel. Cette dernière est une implication de la condition forte du principe de Pauli. Elle est très facile à implémenter dans nos solutions.

- La théorie de Hartree **ne respecte pas** la condition forte du principe de Pauli (antisymétrie totale).
- On n'applique que la condition faible du principe de Pauli (un seul électron dans chaque état quantique).

1.6.6 Résultats physiques de la théorie de Hartree-Fock

1.6.6.1 Résultat 1 : contraction des couches internes

Comme nous l'avons déjà utilisé pour décider si la relativité est importante (voir aussi TD1), nous avons que :

- Les électrons des couches internes ressentent un potentiel très attractif.
- Pour $Z > 2$, le rayon de la couche $n = 1$ est approximativement réduit d'un facteur $1/(Z - 2)$ par rapport à l'hydrogène.

1.6.6.2 Résultat 2 : énergies très négatives des couches internes

- L'énergie des électrons internes est beaucoup plus négative que dans l'atome d'hydrogène.
- Approximation :

$$E_{n=1} \approx (Z - 2)^2 E_H$$

1.6.6.3 Résultat 3 : écrantage des couches externes

- Les électrons externes sont fortement écrantés par les couches internes.
- Ils ressentent une charge nucléaire effective faible, $Z_{\text{eff}} \ll Z$.
- Pour les électrons de valence des atomes neutres, $Z_{\text{eff}} \approx n$, où n désigne la couche la plus externe occupée dans l'atome.
- Le rayon atomique varie peu avec Z pour les éléments d'une même colonne, mais diminue le long d'une période car Z_{eff} augmente légèrement quand on remplit une même couche.

1.6.6.4 Résultat 4 : énergie des électrons de valence

- L'énergie d'un électron de valence est du même ordre de grandeur que celle de l'état fondamental de l'hydrogène.
- Ceci explique les propriétés chimiques similaires des électrons externes.

1.6.6.5 Résultat 5 : dépendance en n et l

- Contrairement à l'atome hydrogénoïde (H, Ne^+ , Li^{2+} , etc.) l'énergie dépend de n et de l .
- Les électrons avec petit l pénètrent davantage vers le noyau :

$$E_{n,l=0} < E_{n,l=1} < E_{n,l=2}$$

🔖 Rappel (prérequis)

Nombres quantiques et leur interprétation

On rappelle les notations usuelles. Dans un système quantique, les nombres quantiques apparaissent comme des constantes de séparation lors de la résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, lorsque celle-ci est séparable grâce aux symétries du système.

Pour un potentiel central, comme dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'équation est naturellement décrite en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . La séparation des variables conduit alors à trois nombres quantiques orbitaux n , ℓ et m_ℓ .

- n : nombre quantique principal, associé à l'équation radiale ;
- ℓ : nombre quantique orbital, associé à l'équation angulaire ;
- m_ℓ : nombre quantique magnétique, associé à la dépendance en ϕ .

En outre, les particules possèdent un moment cinétique intrinsèque, le spin, caractérisé par un nombre quantique s et sa projection m_s , indépendamment du mouvement orbital.

Concept fondamental — Symétrie et nombres quantiques atomiques

Dans la théorie atomique de Hartree–Fock, on suppose que le potentiel moyen ressenti par chaque électron est *central et sphériquement symétrique*, comme dans l'atome d'hydrogène. Cette invariance par rotation implique que le Hamiltonien effectif commute avec les opérateurs du moment cinétique orbital \hat{L}^2 et \hat{L}_z .

En conséquence, les orbitales électroniques peuvent être choisies comme états propres de \hat{L}^2 et \hat{L}_z et sont caractérisées par les mêmes nombres quantiques (n, ℓ, m_ℓ, m_s) que dans l'atome d'hydrogène. En revanche, le potentiel n'étant plus strictement coulombien, les niveaux d'énergie dépendent à la fois de n et de ℓ , et la dégénérescence en ℓ est levée.

TABLE 1.1 – Nombres quantiques et notation spectroscopique

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	...
Notation spectroscopique	s	p	d	f	g	h	i	...

Pour aller plus loin : L'origine des sous-couches : Pénétration et Barrière Centrifuge Dans l'atome d'hydrogène, l'énergie d'un électron

ne dépend que de son nombre quantique principal n ($E_{2s} = E_{2p}$). Cette dégénérescence accidentelle est spécifique au potentiel Coulombien pur en $1/r$.

Dans un atome polyélectronique, le potentiel central $V(r)$ n'est plus purement Coulombien à cause de l'écrantage. La dégénérescence en l est levée. L'ordre des niveaux d'énergie devient $E_{ns} < E_{np} < E_{nd} < E_{nf}$.

Cette structure s'explique par la compétition entre l'attraction électrostatique et le moment cinétique orbital :

- **La barrière centrifuge** : L'équation de Schrödinger radiale inclut un terme de potentiel répulsif proportionnel à $\frac{l(l+1)}{r^2}$.
 - Pour les électrons avec un grand moment cinétique (d, f), cette barrière est élevée et repousse la fonction d'onde loin de l'origine. L'électron reste confiné à la périphérie de l'atome, "hors" du cœur électronique. Il ressent un noyau totalement écrané ($Z_{\text{eff}} \approx 1$ pour un neutre), donc une interaction moins attractive.
 - Pour les électrons s ($l = 0$), la barrière centrifuge est nulle. La densité de probabilité au noyau $|\psi(0)|^2$ est non nulle.
- **La pénétration du cœur** : L'orbitale s possède des lobes internes qui "plongent" (pénètrent) à l'intérieur des couches électroniques de cœur ($n - 1, n - 2 \dots$). Lorsqu'un électron de valence se trouve à l'intérieur de ce nuage de cœur, l'effet d'écran diminue drastiquement. Il ressent momentanément la pleine charge nucléaire $+Ze$ au lieu de la charge écranée.
- **Conséquence énergétique** : Cette interaction forte près du noyau abaisse l'énergie potentielle moyenne des orbitales de faible l .

$$E_{ns} < E_{np} < E_{nd} \dots$$

C'est ce phénomène qui justifie l'existence des sous-couches chimiques et l'ordre de remplissage de Klechkowski (ou Madelung). Cependant, ceci dépasse le cadre de cette brève introduction.

🔖 Rappel (prérequis)

Dégénérescence des niveaux d'énergie dans l'atome hydrogénoïde

Rappelons que, dans l'atome d'hydrogène, les nombres quantiques obéissent aux restrictions :

$$0 \leq l \leq n - 1, \quad (1.15)$$

$$-l \leq m_l \leq l. \quad (1.16)$$

Dans les atomes hydrogénoïdes (un seul électron), tous les états de même nombre quantique principal n sont dégénérés : l'énergie d'un état quantique

ne dépend que de n , et non de ℓ , ni de m_ℓ , ni de m_s (dans le cadre non relativiste de l'équation de Schrödinger).

Comme nous venons de le discuter, cette dégénérescence est levée dans les atomes polyélectroniques, notamment par rapport au nombre quantique ℓ , en raison de l'écrantage et des interactions électron-électron. Qu'en est-il alors des autres nombres quantiques ?

1.6.6.6 Atomes polyélectroniques et capacité des sous-couches

Dans les atomes polyélectroniques, la dégénérescence en énergie par rapport au nombre quantique orbital ℓ est levée. En revanche, en l'absence de champ externe, les états restent dégénérés par rapport :

- à la projection orbitale m_ℓ , qui peut prendre les valeurs $-\ell \leq m_\ell \leq \ell$;
- à la projection de spin $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

Chaque valeur de m_ℓ pouvant être associée à deux orientations de spin, une sous-couche caractérisée par le nombre quantique ℓ peut contenir au maximum

$$2(2\ell + 1)$$

électrons.

1.6.7 Lien avec la classification périodique

- L'ordre de remplissage des sous-couches découle directement des calculs de Hartree (et Hartree-Fock).
- La structure de la table périodique est expliquée par :
 - le principe d'exclusion,
 - l'écrantage,
 - la dépendance de l'énergie en l .

Piège

Piège conceptuel — Exceptions à l'ordre Aufbau

L'ordre de remplissage Aufbau (ou règle de Madelung) fournit une *heuristique* utile, mais il n'est pas universel. Lorsque des sous-couches sont proches en énergie (notamment ns et $(n-1)d$), l'échange et l'auto-cohérence (Hartree-Fock) peuvent modifier la configuration électronique attendue.

Les principales exceptions observées dans les atomes neutres (jusqu'à la fin du bloc $5d$) sont :

- **Cr** ($Z = 24$) : $[\text{Ar}] 3d^5 4s^1$ (au lieu de $3d^4 4s^2$)

- **Cu** ($Z = 29$) : $[\text{Ar}] 3d^{10} 4s^1$ (au lieu de $3d^9 4s^2$)
- **Nb** ($Z = 41$) : $[\text{Kr}] 4d^4 5s^1$
- **Mo** ($Z = 42$) : $[\text{Kr}] 4d^5 5s^1$
- **Ru** ($Z = 44$) : $[\text{Kr}] 4d^7 5s^1$
- **Rh** ($Z = 45$) : $[\text{Kr}] 4d^8 5s^1$
- **Pd** ($Z = 46$) : $[\text{Kr}] 4d^{10} 5s^0$ (cas extrême)
- **Ag** ($Z = 47$) : $[\text{Kr}] 4d^{10} 5s^1$
- **Pt** ($Z = 78$) : $[\text{Xe}] 4f^{14} 5d^9 6s^1$
- **Au** ($Z = 79$) : $[\text{Xe}] 4f^{14} 5d^{10} 6s^1$

Ces configurations reflètent la stabilisation particulière des sous-couches *demi-remplies* (d^5) et *pleines* (d^{10}), ainsi que la forte compétition énergétique entre ns et $(n-1)d$.

Remarque importante. *Tous* les lanthanides ($4f$) et *tous* les actinides ($5f$) doivent être considérés comme des exceptions systématiques à l'ordre Aufbau simple : leurs configurations électroniques résultent d'une compétition étroite entre ns , $(n-1)d$ et $(n-2)f$, et nécessitent un traitement auto-cohérent (et souvent relativiste).

1.6.8 En bref

La théorie de Hartree (et Hartree–Fock) fournit une description quantitative, auto-cohérente et physiquement intuitive des atomes polyélectroniques, reliant la mécanique quantique microscopique à la chimie et à la structure périodique de la matière.

Chapitre 2

Modèles Nucléaires

Le noyau est un système plus difficile à décrire quantitativement que l'atome. L'interaction nucléaire forte (aussi appelée interaction forte) est plus complexe que l'interaction électromagnétique. Cependant, des modèles simples permettent déjà de rendre compte d'un grand nombre d'observations essentielles.

Par exemple, un modèle semi-empirique, comportant seulement cinq paramètres ajustables, permet de reproduire la masse de l'ensemble des isotopes de tous les éléments chimiques (plus de 250 valeurs du nombre de masse A) avec une précision suffisante pour de nombreuses applications. La masse nucléaire est en effet une grandeur clé pour prévoir l'énergie libérée lors des réactions nucléaires et des processus de radioactivité.

Dans ce chapitre, nous présentons les modèles simples les plus importants et la manière dont ils décrivent le noyau dans son état fondamental. Le chapitre suivant sera consacré aux noyaux excités, à la radioactivité et aux réactions nucléaires.

2.1 L'importance de la masse et son interprétation

En relativité, la grandeur fondamentale conservée n'est plus la masse, mais l'énergie totale (relativiste). Cette énergie inclut l'énergie de masse au repos $E = mc^2$, ainsi que toutes les autres formes d'énergie : énergies cinétique, potentielle, de rayonnement, etc. Lorsqu'un système se lie et libère de l'énergie, son énergie totale diminue, et sa masse diminue également.

2.1.1 Un exemple pour clarifier l'interprétation de la masse

L'atome d'hydrogène a une masse inférieure à la somme des masses du proton et de l'électron libres, car l'énergie de liaison (13,6 eV) a été libérée (par exemple par émission de photons) lors de la formation de l'atome. Cette énergie correspond à une différence de masse de $13,6 \text{ eV}/c^2$, qui s'appelle « le défaut de masse ».

TABLE 2.1 – Masses de l'hydrogène et de ses constituants

particule	Masse (u)	E (MeV)
e	0,000 548 579 909 044 1(97)	0,510 998 9
e	$\pm 0,000 000 000 000 009 7$	
p	1,007 276 466 578 9(83)	938,272 013 2
p+e	1,007 825 046 487 9(83)	938,783 012 1
^1_1H	1,007 825 031 90(1)	938,782 998 5
différence	0,000 000 014 59(1)	0,000 013 6

Notion clé — Défaut de masse et Energie de liaison

Lors de la formation d'un atome à partir de particules libres, de l'énergie est libérée : c'est **l'énergie de liaison** B . D'après la relation d'Einstein $E = mc^2$, cette énergie correspond à une diminution de la masse du système. La masse de l'atome est donc légèrement inférieure à la somme des masses des particules libres. Cette différence est appelée **défaut de masse**.

⚠ Piège

Les isotopes et la masse dans le tableau de Mendelév La masse atomique de ^1_1H est $1,007 94 \pm 0,000 07 \text{ u}$. S'agit-il de la masse de l'isotope ^1_1H ? Non !

L'hydrogène présent sur Terre est presque entièrement constitué de l'isotope ^1_1H (protium, comportant un proton et aucun neutron), ainsi que d'environ 0,0115 % de deutérium ^2_1H (un proton et un neutron). La masse $1,007 94 \pm 0,000 07 \text{ u}$ représente donc une moyenne pondérée des masses des isotopes naturels de l'hydrogène.

L'incertitude sur la masse atomique de l'hydrogène est dominée par l'incertitude sur les abondances isotopiques. Les masses de chaque isotope,

prises individuellement, sont connues avec une bien meilleure précision.

2.1.2 La masse fournit une information sur l'énergie de liaison du noyau

En physique nucléaire, les énergies de liaison dans le noyau sont de l'ordre de 7 MeV par nucléon, soit environ 10^5 à 10^6 fois plus grandes que les énergies caractéristiques des électrons dans un atome.

Considérons le noyau ${}^4_2\text{He}$. On compare sa masse à celle de ses constituants. Il est composé de deux atomes de protium ${}^1_1\text{H}$ et de deux neutrons. On néglige ici l'énergie de liaison atomique de 13,6 eV des atomes de protium.

TABLE 2.2 – Masses atomiques et énergies de liaison (extrait du (Eisberg and Resnick, 1985, Tableau 15-1))

	Z	A	Masse (u)	ΔE (MeV)	$\Delta E/A$ (MeV)
${}^1_0\text{n}$	0	1	1,008 665 4(4)	–	–
${}^1_1\text{H}$	1	1	1,007 825 2(1)	–	–
${}^2_1\text{H}$	1	2	2,014 102 2(1)	2,22	1,11
${}^3_1\text{H}$	1	3	3,016 050 0(10)	8,47	2,83
${}^3_2\text{He}$	2	3	3,016 029 9(2)	7,72	2,57
${}^4_2\text{He}$	2	4	4,002 603 3(4)	28,3	7,07

Le défaut de masse des noyaux est important. Par exemple, la masse du noyau ${}^4_2\text{He}$ est inférieure à la somme des masses de ses constituants d'une quantité $\Delta M = 0,030\,377\,9$ u, soit

$$\begin{aligned} \Delta M &= 2 \times \text{masse du protium} + 2 \times \text{masse du neutron} - \text{masse de } {}^4_2\text{He} \\ &\simeq 0,030\,377\,9 \text{ u} \times 931,5 \text{ MeV/u} \simeq 28,3 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ici, ΔM est le défaut de masse du noyau, qui correspond à l'énergie de liaison.

Nous vérifierons dans le TD3 l'origine du facteur de conversion $1 \text{ u } c^2 = 931,5 \text{ MeV}$.

2.1.3 Masse et énergie de liaison : aperçu

Si l'on connaît la masse de tous les isotopes, on peut calculer l'énergie nette de liaison de chaque noyau. D'où l'utilité d'une formule empirique qui permet d'estimer, à l'aide de seulement cinq paramètres ajustables, la masse de l'ensemble des isotopes de tous les éléments chimiques. Cette formule fait partie du modèle de la goutte liquide.

Avant de développer ce modèle, nous allons :

- rappeler ce que nous savons déjà du noyau ;
- ajouter quelques observations clés ;
- réfléchir à la manière dont on peut étudier le noyau.

2.2 Propriétés phénoménologiques des noyaux atomiques

Avant d'introduire un modèle théorique du noyau atomique, nous rappelons ses propriétés expérimentales fondamentales.

2.2.1 Observations générales

Nous avons relevé dans le chapitre précédent les propriétés suivantes :

- Le noyau d'un atome de nombre atomique Z et de nombre de masse A est constitué de Z protons et de $N = A - Z$ neutrons.
- Le noyau porte une charge $+Ze$ et a une masse de l'ordre de Au , où u désigne l'unité de masse atomique unifiée.
- Nous avons vu que la masse nucléaire n'est pas exactement égale à Au , en raison de l'énergie de liaison nucléaire.
- Le noyau possède un rayon de l'ordre de quelques femtomètres ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). Nous examinerons cette taille plus en détail ultérieurement. Historiquement, cette échelle de longueur correspond à la distance au centre du noyau à partir de laquelle l'interaction avec la particule alpha, dans les expériences de Rutherford et de ses collaborateurs Geiger et Marsden, ne pouvait plus être décrite comme une simple répulsion coulombienne par un noyau ponctuel : la particule alpha commence alors à ressentir la distribution spatiale de la charge nucléaire.
- Le noyau possède un moment angulaire intrinsèque (spin), qui est demi-entier (en unités de \hbar) si le noyau est un fermion, et entier s'il est un boson.

2.2.2 Conséquences pour la stabilité du noyau

On peut déjà conclure qu'il doit exister une interaction nucléaire forte, attractive entre nucléons (protons et neutrons), et suffisamment intense pour compenser la répulsion électrostatique entre protons et assurer la stabilité du noyau.

Considérons l'énergie électrostatique de deux protons séparés par une distance $r_{12} = 2 \text{ fm}$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}, \quad (2.2)$$

où $q_1 = q_2 = e$. Cette expression peut être réécrite à l'aide de la constante de structure fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137}. \quad (2.3)$$

On obtient alors

$$V = \alpha \hbar c \frac{1}{r_{12}} \simeq \frac{1}{137} \times 197,3 \text{ MeV fm} \times \frac{1}{2 \text{ fm}} \simeq 0,72 \text{ MeV}. \quad (2.4)$$

L'énergie de liaison entre nucléons doit donc être supérieure à cette valeur, sans quoi le noyau ne pourrait pas résister à la répulsion électrostatique entre protons.

Les observations expérimentales montrent en effet que l'interaction nucléaire attractive atteint une intensité de l'ordre de plusieurs dizaines de MeV, typiquement ~ 50 à 70 MeV , pour des distances inter-nucléoniques de l'ordre de 1 à 2 fm.

L'interaction nucléaire forte est difficile à décrire analytiquement. Néanmoins, sur le plan qualitatif, on observe qu'elle est :

- essentiellement indépendante de la charge électrique (elle agit de façon comparable entre protons et neutrons) ;
- fortement répulsive à très courte distance (distances $\lesssim 0,5 \text{ fm}$) ;
- attractive à des distances intermédiaires (de l'ordre de 1 à 2 fm) ;
- de portée courte, décroissant rapidement au-delà de quelques femtomètres.

2.2.3 Moment angulaire total du noyau (spin nucléaire)

Nous ajoutons enfin la propriété suivante :

- Le noyau possède un moment magnétique, dû à la fois au moment magnétique intrinsèque des protons et des neutrons, et au mouvement orbital des protons dans le noyau. La mise en évidence expérimentale de ce moment magnétique nécessite des techniques de spectroscopie de très haute précision, capables de résoudre la structure hyperfine des niveaux d'énergie atomiques, de largeur typique ΔE , résultant de l'interaction entre le moment magnétique du noyau et celui des électrons.

- Le nombre quantique i du moment angulaire total du noyau, habituellement appelé *spin nucléaire*, peut être déterminé à l'aide de techniques de spectrométrie de très haute précision. On observe que i est entier pour les noyaux de nombre de masse pair A , avec $i = 0$ lorsque Z est également pair, et que i est demi-entier pour les noyaux de nombre de masse impair.

La norme I du moment angulaire total nucléaire est donnée en fonction de i par la relation usuelle

$$I = \sqrt{i(i+1)} \hbar.$$

Le moment angulaire total d'un noyau résulte à la fois des moments angulaires de spin intrinsèque des protons et des neutrons, et des moments angulaires orbitaux associés au mouvement de ces particules à l'intérieur du noyau.

- Les noyaux de spin entier sont des bosons, tandis que les noyaux de spin demi-entier sont des fermions.

Avant la découverte du neutron par James Chadwick en 1932, on pensait qu'un noyau de nombre de masse A et de numéro atomique Z contenait A protons et $A - Z$ électrons. Nous montrerons dans le TD qu'un tel modèle est incompatible avec les observations expérimentales, notamment en ce qui concerne le spin nucléaire total et l'énergie de point zéro.

Piège

Spin nucléaire Il convient de souligner qu'en physique nucléaire, le terme *spin* désigne fréquemment le moment angulaire total d'un noyau, alors qu'en physique atomique il fait référence uniquement au moment angulaire de spin intrinsèque.

Lorsqu'il existe un risque de confusion, nous utiliserons explicitement l'expression *moment angulaire de spin intrinsèque* et nous conserverons le symbole s pour désigner la partie du moment angulaire d'une particule élémentaire qui n'est pas associée à un mouvement orbital. Par exemple, les spins intrinsèques du proton, du neutron et de l'électron sont tous caractérisés par $s = 1/2$.

Ces propriétés du spin nucléaire joueront un rôle central dans la compréhension de la structure nucléaire et des modèles microscopiques du noyau.

2.3 Densité nucléaire

2.3.1 Comment étudier le noyau ?

L'électron n'interagissant pas par l'interaction nucléaire forte, il constitue une sonde privilégiée pour étudier la distribution de charge à l'intérieur du noyau.

Des électrons de haute énergie, ayant des énergies cinétiques de l'ordre de quelques centaines de mégaélectronvolts, ont ainsi été utilisés pour étudier la distribution des protons dans des noyaux de toutes tailles.

L'analyse détaillée de la diffusion des électrons par les protons du noyau nécessite l'utilisation de l'équation de Dirac, plutôt que de l'équation de Schrödinger, en raison du caractère relativiste des électrons à ces énergies.

2.3.2 Densité nucléaire approximativement constante

Les résultats expérimentaux, qui peuvent paraître surprenants à première vue, montrent que les noyaux atomiques présentent une densité de charge approximativement uniforme, quelle que soit leur taille.

Les expériences mettent en évidence les propriétés suivantes :

- Le rayon nucléaire suit la loi empirique

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad R_0 \simeq 1,2 \text{ fm},$$

ce qui implique une densité nucléaire approximativement constante.

- L'énergie de liaison par nucléon est de l'ordre de

$$\frac{B}{A} \simeq 8 \text{ MeV}$$

pour les noyaux de masse moyenne et lourde.

- L'interaction nucléaire forte est :
 - de courte portée ($\sim 1-2$ fm) ;
 - fortement attractive à distance intermédiaire ;
 - répulsive à très courte distance.

Ces propriétés motivent une description dans laquelle chaque nucléon se déplace dans un champ moyen créé par l'ensemble des autres nucléons.

2.4 Le Modèle de la Goutte Liquide

Il était proposé par le physicien théoricien important George Gamow au début des années 1930.¹

2.4.1 Motivation et idée générale

Le *modèle de la goutte liquide* est un modèle phénoménologique du noyau atomique. Il vise à expliquer, de manière simple mais puissante, les tendances globales des masses nucléaires, des énergies de liaison et des processus comme la fission.

L'idée centrale est une analogie :

- le noyau est assimilé à une goutte de liquide incompressible,
- les nucléons interagissent par une force attractive de courte portée,
- chaque nucléon n'interagit fortement qu'avec ses plus proches voisins.

Le modèle de la goutte liquide conduit à une formule semi-empirique de la masse, que nous présenterons en détail à la section §2.4.3.

Cette approche néglige la structure microscopique (couches, spins individuels), mais capture remarquablement bien les propriétés moyennes des noyaux.

2.4.2 Hypothèses physiques du modèle

Les hypothèses essentielles sont les suivantes :

1. Les nucléons ont une densité à peu près constante dans le noyau.
2. L'interaction nucléaire est attractive et de courte portée.
3. Le noyau est globalement sphérique à l'état fondamental.
4. Les effets quantiques individuels sont remplacés par des termes moyens.

🔖 Rappel (prérequis)

La force nucléaire forte est :

- attractive à courte distance,
- essentiellement indépendante de la charge,
- saturante (chaque nucléon n'interagit fortement qu'avec un nombre limité de voisins).

1. Il est important en cosmologie, par exemple, parcequ'il a proposé le rayonnement de fond cosmologique, la création des éléments quelques minutes après le Big Bang, parmi autres notions importantes.

2.4.3 Formule semi-empirique de la masse

La masse atomique est écrite sous la forme

$$M(A, Z) = Z m_H + (A - Z) m_n - \frac{B(A, Z)}{931.5}, \quad (2.5)$$

où les masses sont en unités de masse atomique (u), $B(A, Z)$ et l'énergie de liaison en MeV et

$$1 \text{ u } c^2 = 931.5 \text{ MeV}.$$

🔖 Rappel (prérequis)

L'énergie de liaison, il s'agit de l'énergie associée aux forces qui maintiennent le noyau lié, ou plus précisément de la différence d'énergie entre l'état dans lequel toutes les particules sont infiniment séparées et au repos, et l'état fondamental du noyau.

L'énergie de liaison $B(A, Z)$ est décomposée en cinq termes :

$$B(A, Z) = f_V + f_S + f_C + f_A + f_P, \quad (2.6)$$

avec

$$f_V = a_V A, \quad (2.7)$$

$$f_S = -a_S A^{2/3}, \quad (2.8)$$

$$f_C = -a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}, \quad (2.9)$$

$$f_A = -a_A \frac{(A-2Z)^2}{A}, \quad (2.10)$$

$$f_P = \delta(A, Z). \quad (2.11)$$

Dans le modèle de la goutte liquide, chaque terme possède une interprétation physique claire.

2.4.3.1 Terme de volume

$$B_V = a_V A \quad (2.12)$$

Chaque nucléon contribue une énergie de liaison à peu près constante, car il interagit avec un nombre fixe de voisins. Ce terme est analogue à l'énergie de cohésion d'un liquide.

Il correspond à l'énergie de liaison que chaque nucléon apporterait s'il était plongé dans un milieu nucléaire homogène, où il interagit fortement avec un nombre saturé de voisins. Le terme suivant rend compte du fait que les nucléons proches de la surface ne sont pas plongés dans un milieu nucléaire homogène.

2.4.3.2 Terme de surface

$$B_S = -a_S A^{2/3} \quad (2.13)$$

Les nucléons situés près de la surface ont moins de voisins que ceux du centre du noyau. Ce terme réduit l'énergie de liaison totale. Il est proportionnel à la surface du noyau.

2.4.3.3 Terme coulombien

$$B_C = -a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (2.14)$$

Il représente la répulsion électrostatique entre les protons. Ce terme devient de plus en plus important pour les noyaux lourds et limite la stabilité des grands Z .

2.4.3.4 Terme d'asymétrie

$$B_A = -a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} \quad (2.15)$$

Il traduit le principe d'exclusion de Pauli : les protons et neutrons occupent des niveaux différents. Un excès de neutrons ou de protons augmente l'énergie cinétique et diminue la liaison.

2.4.3.5 Terme d'appariement

Le terme $\delta(A, Z)$ dépend de la parité de Z et $N = A - Z$:

$$\delta = \begin{cases} +a_P A^{-1/2} & \text{noyaux avec } Z \text{ pair et } N \text{ pair,} \\ 0 & \text{noyaux avec } Z \text{ impair et } N \text{ pair ou inversement,} \\ -a_P A^{-1/2} & \text{noyaux avec } Z \text{ impair et } N \text{ impair.} \end{cases}$$

Il reflète la tendance des nucléons à s'apparier avec spin opposé. On peut interpréter ce terme en lien avec les effets d'échange étudiés en Hartree-Fock :

deux nucléons de spins opposés peuvent être plus proches spatialement, ce qui augmente l'attraction de la force nucléaire et augmente l'énergie de liaison, (augmente le B), ce qui diminue la masse.

⚠ Piège

Le modèle de la goutte liquide ne prédit pas correctement les nombres magiques ni les spins nucléaires. Il s'agit d'un modèle global, non microscopique.

2.4.4 Conséquences physiques majeures

2.4.4.1 Stabilité nucléaire

Le modèle explique :

- pourquoi les noyaux stables ont $N > Z$ pour les grands A ,
- la vallée de stabilité dans le diagramme $N-Z$.
- pourquoi il existe une limite supérieure à Z ,

Les noyaux stables ont $N > Z$ pour les grands A Pour les noyaux lourds, la répulsion coulombienne entre protons favorise un excès de neutrons afin de limiter l'augmentation de Z . En revanche, le terme d'asymétrie pénalise un déséquilibre trop important entre N et Z . La stabilité résulte de la compétition entre ces deux contributions de la formule semi-empirique de masse.

La vallée de stabilité La vallée de stabilité des noyaux atomiques est la région du diagramme N en fonction de Z , indiquée en noir sur la Fig. 2.1, pour laquelle les noyaux sont stables vis-à-vis des désintégrations bêta et alpha (et autres modes de désintégration).

Remarquons que, pour $1 \leq Z \leq 82$ (de l'hydrogène jusqu'au plomb), il existe toujours au moins un isotope stable pour chaque valeur de Z .

Limite supérieure en Z Au-delà, pour $Z \geq 83$ (le bismuth et les éléments plus lourds), il n'existe plus d'isotopes strictement stables. Tous les noyaux sont radioactifs, principalement en raison des désintégrations alpha et, pour les plus lourds, de la fission spontanée.

Nous étudierons ces modes de désintégration dans le chapitre 3, en nous appuyant notamment sur la formule semi-empirique de masse pour en comprendre l'origine énergétique.

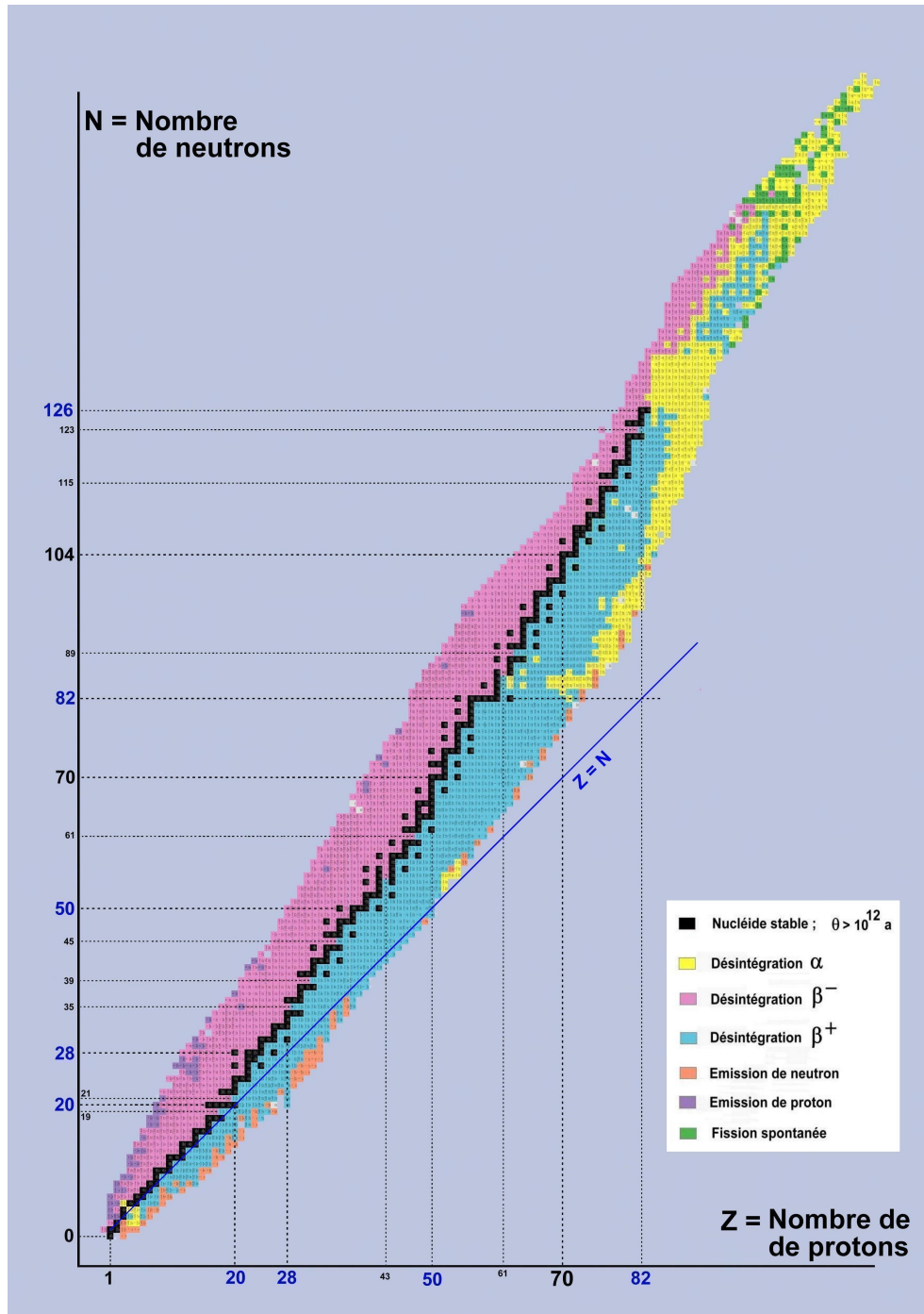


FIGURE 2.1 – Vallée de stabilité des noyaux atomiques : noyaux stables en noir, noyaux instables en couleur selon leur mode de désintégration. Source : Wikipédia

2.4.4.2 Énergie de liaison du dernier neutron

On définit l'énergie de liaison du dernier neutron (ou énergie de séparation du neutron) par :

$$S_n(A, Z) \equiv [M(A - 1, Z) + m_n - M(A, Z)]c^2, \quad (2.16)$$

c'est-à-dire l'énergie minimale à fournir pour arracher un neutron à un noyau (A, Z) et obtenir $(A - 1, Z)$. En termes d'énergies de liaison totales, on a également :

$$S_n(A, Z) = B(A, Z) - B(A - 1, Z). \quad (2.17)$$

2.4.4.3 Fission nucléaire

Pour les noyaux lourds :

- le terme coulombien favorise la déformation,
- le terme de surface s'y oppose,
- un compromis peut conduire à la fission.

Le modèle de la goutte liquide permet de comprendre qualitativement :

- les barrières de fission,
- la libération d'énergie lors de la fission.

Nous étudierons la fission et autre modes de désintégration dans le chapitre 3.

2.4.5 Portée et limites du modèle

- Excellent pour les tendances moyennes des masses nucléaires.
- Insuffisant pour décrire la structure fine des noyaux.
- Insuffisant pour expliquer les nombres magiques.
- Complémentaire du modèle en couches.

🔖 Rappel (prérequis)

En pratique, la physique nucléaire moderne combine :

- modèles macroscopiques (goutte liquide),
- modèles microscopiques (couches, Hartree–Fock, DFT).

2.4.6 En bref

Le modèle de la goutte liquide montre que :

une description simple et collective peut expliquer une grande partie des propriétés globales du noyau, même en l'absence de détails quantiques fins.

Il constitue une pierre angulaire conceptuelle pour comprendre la stabilité nucléaire et la fission.

2.5 Nombres magiques et modèle en couches

2.5.1 Motivation : limites du modèle de la goutte liquide

Le modèle de la goutte liquide, présenté à la section précédente, explique remarquablement bien les tendances globales :

- énergies de liaison moyennes,
- vallée de stabilité,
- fission des noyaux lourds.

Cependant, certaines observations expérimentales ne peuvent être comprises dans un cadre purement macroscopique. Parmi elles, l'existence de noyaux particulièrement stables pour certaines valeurs de Z ou de N .

🔖 Rappel (prérequis)

On observe expérimentalement que certains noyaux ont :

- des énergies de liaison anormalement élevées,
- des sections efficaces de réaction plus faibles,
- des probabilités de capture réduites.

Ces noyaux sont dits *particulièrement stables*.

2.5.2 Observation des nombres magiques

L'analyse systématique des masses et des propriétés nucléaires révèle des valeurs privilégiées de Z ou de N , appelées *nombres magiques* :

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

Un noyau est dit :

- *simplement magique* si Z ou N est magique,
- *doublement magique* si Z et N sont magiques (exemples : ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{208}\text{Pb}$).

Ces noyaux présentent :

- une stabilité accrue,
- des énergies d'excitation plus élevées,
- des rayons et moments quadripolaires compatibles avec une structure sphérique.

2.5.3 Analogie avec les couches électroniques

L'idée directrice est une analogie avec la physique atomique :

- les électrons dans l'atome occupent des couches quantifiées,
- des couches complètes conduisent à une stabilité chimique accrue (gaz nobles).

De manière analogue :

- les nucléons se déplacent dans un potentiel moyen,
- les niveaux d'énergie sont quantifiés,
- des couches nucléaires complètes expliquent les nombres magiques.

2.5.4 Premiers modèles en couches et difficultés

Les premiers essais de modèles en couches utilisaient :

- un potentiel harmonique,
- ou un puits de potentiel sphérique.

Ces modèles prédisaient correctement les nombres magiques 2, 8 et 20, mais *échouaient* à reproduire :

28, 50, 82, 126.



Piège

Un potentiel central seul (sans interaction supplémentaire) ne suffit pas à expliquer la structure fine des couches nucléaires.

2.5.5 Rôle crucial du spin

La résolution de ce problème est venue lorsque l'on a pris en compte le *couplage spin-orbite* du nucléon.

- Chaque nucléon possède un spin $s = \frac{1}{2}$.
- Son mouvement orbital est caractérisé par un moment l .
- L'interaction spin-orbite couple \vec{l} et \vec{s} .

Ce couplage sépare fortement les niveaux

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad j = l - \frac{1}{2}.$$

L'effet est *beaucoup plus fort* dans le noyau que dans l'atome, et modifie profondément l'ordre des niveaux d'énergie.

2.5.6 Conséquence sur les nombres magiques

Avec un terme spin-orbite approprié :

- les niveaux sont réordonnés,
- de grands écarts d'énergie apparaissent,
- les nombres magiques observés sont correctement reproduits.

🔖 Rappel (prérequis)

Les nombres magiques ne sont donc *pas* une propriété du modèle de la goutte liquide, mais une signature de la structure quantique microscopique du noyau.

2.5.7 Complémentarité des deux approches

- Le modèle de la goutte liquide :
 - décrit les propriétés globales,
 - explique la fission et les masses moyennes.
- Le modèle en couches :
 - explique les nombres magiques,
 - prédit spins, parités et niveaux excités.

Les deux descriptions sont donc *complémentaires*, et non concurrentes.

2.5.8 Perspective

La prise en compte du spin et du couplage spin-orbite constitue une étape conceptuelle majeure de la physique nucléaire.

Les nombres magiques sont la preuve expérimentale que, malgré son caractère collectif, le noyau reste un système quantique à structure en couches.

Le couplage spin-orbite et le modèle en couches ne seront malheureusement pas étudiés plus en détail dans la suite du cours.

Chapitre 3

Réactions nucléaires et la radioactivité

3.1 Portée et motivation

Dans ce chapitre, nous utilisons les modèles nucléaires introduits au chapitre précédent — en particulier le modèle de la goutte liquide et la formule semi-empirique de masse — afin de comprendre la radioactivité, c'est-à-dire la désintégration spontanée des noyaux instables. Les éléments dont les noyaux sont instables sont dits radioactifs. Nous utiliserons également ces modèles pour analyser les réactions nucléaires impliquant des noyaux stables et instables.

3.1.1 Radioactivité

La radioactivité joue un rôle central en physique fondamentale et en cosmologie, ainsi qu'en physique appliquée et dans des domaines tels que la physique médicale et la géologie.

Lien avec la formule semi-empirique de masse.

Au chapitre précédent, nous avons introduit l'énergie de liaison

$$B(A, Z) = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - M(A, Z)c^2,$$

et montré que, dans le modèle de la goutte liquide, elle peut être approchée par la formule semi-empirique

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta(A, Z).$$

Un noyau est stable vis-à-vis d'un mode de désintégration donné si la transformation considérée possède une valeur de Q négative :

$$Q = [M_{\text{initial}} - M_{\text{final}}] c^2 < 0.$$

Il est instable si $Q > 0$.

En termes d'énergie de liaison, cela revient à dire qu'un noyau est instable s'il existe une configuration de fragments telle que

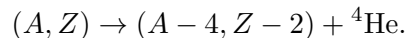
$$\sum_i B_i > B_{\text{initial}}.$$

Autrement dit, même si l'énergie de liaison du noyau initial est positive (le noyau est lié), il sera instable si une fragmentation permet d'augmenter l'énergie de liaison totale — donc de diminuer l'énergie de masse totale.

Qu'est-ce qu'un « mode de désintégration » ?

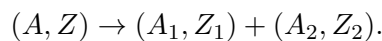
Les désintégrations radioactives sont classées en quatre grandes catégories : la désintégration alpha, la fission spontanée, la désintégration bêta et la désintégration gamma. Les termes alpha, bêta et gamma désignent historiquement le type de rayonnement (ou de particule) émis lors du processus.

Désintégration alpha et fission spontanée La particule alpha est le noyau d'hélium ${}^4\text{He}$. La désintégration alpha correspond à la réaction



Ce mode de désintégration devient important pour les éléments avec $Z > 82$. Nous allons voir pourquoi dans la section 3.2.

La fission spontanée est une généralisation dans laquelle un noyau lourd se fragmente en deux noyaux de masses comparables :



Ce mode de désintégration devient important pour les éléments même plus lourds, $Z \gtrsim 92$, ou de manière équivalente, cela correspond à des noyaux tels que $A \gtrsim 230$.

Désintégration bêta

Dans la désintégration bêta, un neutron désintègre à un proton (ou l'inverse). Le résultat est que l' A reste constante mais $Z \rightarrow Z \pm 1$ lorsque $N \rightarrow N \mp 1$. La particule bêta est un électron (β^-) ou un positron (β^+).

Dans la désintégration β^- :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (3.1)$$

et le noyau évolue selon

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1). \quad (3.2)$$

Dans la désintégration β^+ :

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e, \quad (3.3)$$

et

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z - 1).$$

La désintégration bêta comprend trois processus liés par l'interaction faible : la désintégration β^- , la désintégration β^+ et la capture électronique. Cette dernière peut être interprétée comme l'absorption d'un électron atomique par le noyau.

Contrairement à la désintégration α ou à la fission, la désintégration β n'est pas limitée aux noyaux lourds : elle constitue le mécanisme universel d'ajustement du rapport N/Z dans l'ensemble de la table des nucléides.

La désintégration β devient importante pour tous les noyaux situés en dehors de la vallée de stabilité, indépendamment de la valeur absolue de Z , dès que le terme d'asymétrie rend énergétiquement favorable une modification du rapport N/Z .

On regardera la désintégration bêta dans la section 3.3.

Désintégration gamma

Le rayonnement gamma correspond à l'émission d'un photon. Il s'agit d'une transition entre deux niveaux d'énergie d'un même noyau :

$$(A, Z)^* \rightarrow (A, Z) + \gamma.$$

Les nombres A et Z restent inchangés. Les énergies mises en jeu étant typiquement de l'ordre du MeV, il s'agit de photons de haute énergie.

Contrairement à la désintégration α ou à la fission, la désintégration γ n'est pas limitée aux noyaux lourds.

3.1.2 Réactions nucléaires

Les réactions nucléaires constituent des sources majeures d'énergie. L'énergie produite par les réactions de fission est une source importante d'électricité, notamment en France. L'énergie de fusion est la source d'énergie des étoiles, en particulier du Soleil. Elle n'est pas encore exploitée industriellement pour la production d'électricité, mais fait l'objet de recherches intensives.

Du point de vue de la physique fondamentale, les réactions nucléaires permettent de sonder la structure des noyaux. Elles conduisent fréquemment à la formation de noyaux excités, dont l'étude fournit des informations sur les niveaux d'énergie, les moments angulaires et les propriétés collectives ou individuelles des nucléons.

3.2 Désintégration Alpha

Nous examinons maintenant plus en détail la désintégration alpha. Nous expliquons pourquoi elle se produit à l'aide d'arguments énergétiques. Nous étudions également la vitesse à laquelle elle se produit en analysant le processus d'effet tunnel.

3.2.1 Énergétique de la désintégration α

Comme nous l'avons expliqué précédemment, la désintégration α se produit lorsque la réaction est énergétiquement favorable.

L'énergie libérée lors de la désintégration α correspond à la diminution de masse des produits formés — la particule α de masse $M(4, 2)$ et le noyau fils de masse $M(A - 4, Z - 2)$ — par rapport à la masse du noyau père radioactif $M(A, Z)$:

$$\begin{aligned} E &= c^2 [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M(4, 2)] \\ &= -B(A, Z) + B(A - 4, Z - 2) + B(4, 2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'énergie libérée est convertie en énergie cinétique de la particule α et du noyau fils. Toutefois, la particule α étant beaucoup plus légère que le noyau fils, elle reçoit la plus grande part de l'énergie cinétique.

La valeur de Q peut être estimée à partir de la formule semi-empirique :

$$Q_\alpha = B(A - 4, Z - 2) + B(4, 2) - B(A, Z).$$

Pour les noyaux lourds ($Z \geq 82$), la diminution du terme coulombien rend souvent $Q_\alpha > 0$, ce qui explique la prépondérance de la radioactivité alpha dans cette région.

Dans le modèle de la goutte liquide, la compétition essentielle oppose :

- la diminution de l'énergie coulombienne (favorable à la division),
- l'augmentation de l'énergie de surface (défavorable).

Pour les noyaux très lourds, le terme coulombien devient suffisamment important pour rendre la fission énergétiquement possible.

3.2.2 Taux de désintégration spontanée

Qu'est-ce qui détermine le taux de désintégration spontanée ?

Pour que la particule α s'échappe du noyau, elle doit franchir une barrière de potentiel coulombien. Dans le TD, nous montrons que la hauteur de cette barrière est d'environ 30 MeV pour ${}_{84}^{212}\text{Po}$. Cette valeur est typique de l'ordre de grandeur des barrières de potentiel coulombien pour les noyaux lourds radioactifs susceptibles de se désintégrer par émission α .

En 1928, Gamow, Condon et Gurney ont traité l'émission de particules α comme un problème de pénétration d'une barrière en mécanique quantique et ont montré que le taux de désintégration des éléments radioactifs par émission α pouvait être expliqué par l'effet tunnel quantique.

Caractère stochastique de la désintégration α . La désintégration α est modélisée comme un processus stochastique de type Poisson, de taux constant R . Pour un noyau donné, la probabilité de désintégration pendant un intervalle de temps infinitésimal $[t, t + dt]$ s'écrit

$$\mathbb{P}(\text{désintégration dans } dt) = R dt + o(dt), \quad (dt \rightarrow 0).$$

La notation $o(dt)$ (notation de Landau) désigne un terme négligeable devant dt , c'est-à-dire tel que

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0.$$

Autrement dit, lorsque dt devient très petit, la probabilité est proportionnelle à dt au premier ordre. Pour une population de N noyaux, cette hypothèse conduit à l'équation différentielle

$$\frac{dN(t)}{dt} = -R N(t),$$

dont la solution est

$$N(t) = N(0) e^{-Rt}. \quad (3.5)$$

On en déduit qu'une population de noyaux suit une loi de désintégration exponentielle.

🔖 Rappel (prérequis)

Théorie de probabilité

Temps de vie et durée de vie moyenne. Pour un noyau donné, on définit son « temps de vie » T comme la durée aléatoire écoulée jusqu'à sa désintégration.

La probabilité qu'il ne se soit pas désintégré à l'instant t (probabilité de survie) est

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-Rt}.$$

La fonction de répartition du temps de vie,

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t),$$

est donc

$$F_T(t) = 1 - e^{-Rt}. \quad (3.6)$$

La densité de probabilité associée est obtenue par dérivation :

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = Re^{-Rt}. \quad (3.7)$$

Le temps de vie moyen est alors

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{\infty} t R e^{-Rt} dt. \quad (3.8)$$

Une intégration par parties conduit à

$$\langle T \rangle = \frac{1}{R}.$$

Le temps de vie suit donc une loi exponentielle de paramètre R , caractéristique d'un processus sans mémoire.

Remarquons que la loi (3.5) implique que, pendant un temps de vie moyen $1/R$, la population décroît d'un facteur e^{-1} .

Un autre paramètre important est la durée $T_{1/2}$, appelée demi-vie ou période, au bout de laquelle la population décroît d'un facteur $1/2$. La loi (3.5) implique

$$T_{1/2} = \ln(2) \langle T \rangle = \frac{\ln(2)}{R} \approx 0,693 \langle T \rangle. \quad (3.9)$$

3.2.3 Dynamique des populations : Filiation radioactive

Lorsqu'un noyau père (indice 1) se désintègre pour donner un noyau fils (indice 2), qui lui-même est instable et se désintègre, nous parlons de **filiation radioactive**. C'est un problème classique d'équations différentielles couplées.

3.2.3.1 Le système d'équations différentielles

Soient $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les populations respectives du père et du fils à l'instant t . Soient λ_1 et λ_2 leurs constantes de désintégration respectives (souvent notées R dans certains ouvrages, mais nous garderons λ pour la probabilité de transition par unité de temps).

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

▣ Rappel de notation

La première équation est simple : le père disparaît. La seconde est cruciale : le fils est créé par la disparition du père (terme $+\lambda_1 N_1$) et disparaît par sa propre radioactivité (terme $-\lambda_2 N_2$).

3.2.3.2 Solution générale

En supposant les conditions initiales $N_1(0) = N_1^0$ et $N_2(0) = 0$, la résolution donne :

1. Pour le père (décroissance exponentielle standard) :

$$N_1(t) = N_1^0 e^{-\lambda_1 t} \quad (3.11)$$

2. Pour le fils (en injectant $N_1(t)$ dans la deuxième équation et en utilisant un facteur intégrant) :

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \quad (3.12)$$

3.2.3.3 Étude des limites intéressantes

Le comportement du système dépend radicalement du rapport entre les durées de vie des deux noyaux.

Cas 1 : Le père a une vie très longue ($\lambda_1 \ll \lambda_2$)

C'est ce qu'on appelle l'**équilibre séculaire**. Si le père est presque stable à l'échelle de temps du fils (ex : $^{226}\text{Ra} \rightarrow ^{222}\text{Rn}$), alors après un certain temps, l'exponentielle $e^{-\lambda_2 t}$ devient négligeable devant $e^{-\lambda_1 t}$.

$$N_2(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1^0 e^{-\lambda_1 t} \implies \lambda_1 N_1 \approx \lambda_2 N_2 \quad (3.13)$$

 **Notion clé — Équilibre séculaire**

À l'équilibre, l'**activité** du fils est égale à celle du père ($A_1 = A_2$). Le fils semble se désintégrer avec la (longue) période du père car il est "nourri" au même rythme qu'il disparaît.

Cas 2 : Le fils a une vie très longue ($\lambda_1 \gg \lambda_2$)

Ici, le père disparaît très rapidement.

- Pour t petit, le fils s'accumule rapidement au fur et à mesure que le père "fond".
- Pour t grand, $e^{-\lambda_1 t} \rightarrow 0$, et la solution devient simplement :

$$N_2(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_1^0 e^{-\lambda_2 t} \quad (3.14)$$

Dans cette limite, une fois que tout le père a disparu, il ne reste qu'un échantillon du fils qui se désintègre tranquillement selon sa propre loi λ_2 .

 **Piège**

N'oubliez pas que si $\lambda_1 = \lambda_2$, la solution mathématique ci-dessus présente une division par zéro. Il faut alors résoudre le système spécifiquement, ce qui donne une solution de la forme $N_2(t) = \lambda N_1^0 t e^{-\lambda t}$. C'est un cas rare en pratique mais classique en examen !

3.2.4 Les quatre chaînes de désintégration naturelle

Un aspect fascinant de la radioactivité α est qu'elle change le nombre de masse A d'un noyau par exactement 4 unités (puisque une particule α est un noyau de ^4_2He). En revanche, la désintégration β et la désexcitation γ ne changent pas A .

Par conséquent, si un noyau lourd appartient à une famille radioactive, tous ses descendants auront un nombre de masse A qui suit la même règle d'arithmétique modulaire :

$$A \pmod{4} = \text{constante} \quad (3.15)$$

Cela implique qu'il existe exactement quatre lignées ou "séries" radioactives indépendantes, caractérisées par la valeur de $A = 4n + k$, où $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3.2.4.1 Description des quatre séries

1. **Série du Thorium** ($4n$) : Commence avec le ^{232}Th et finit sur le plomb stable ^{208}Pb .
2. **Série du Neptunium** ($4n + 1$) : Commence avec le ^{237}Np et finit sur le bismuth ^{209}Bi (ou le thallium ^{205}Tl).
3. **Série de l'Uranium** ($4n + 2$) : Commence avec le ^{238}U et finit sur le ^{206}Pb .
4. **Série de l'Actinium** ($4n + 3$) : Commence avec le ^{235}U et finit sur le ^{207}Pb .

Notion clé — La série éteinte

La série du **Neptunium** ($4n + 1$) est absente de la nature. La demi-vie de son membre le plus long, le ^{237}Np , est de $2,1 \times 10^6$ ans. C'est très court comparé à l'âge de la Terre ($4,5 \times 10^9$ ans). Cette série s'est donc "éteinte" naturellement. Les trois autres subsistent car leurs précurseurs ont des demi-vies comparables à l'âge de la Terre.

3.2.4.2 Cartographie d'une filiation : La série du Thorium

Pour visualiser ces séries, on utilise souvent un diagramme (N, Z) . Chaque désintégration α correspond à une diagonale ($\Delta Z = -2, \Delta N = -2$) et chaque désintégration β^- à une diagonale opposée ($\Delta Z = +1, \Delta N = -1$).

Voici le détail de la série du Thorium ($A = 4n$), la plus directe des trois séries naturelles :

Noyau	Symbole	Mode	Demi-vie
Thorium 232	${}_{90}^{232}\text{Th}$	α	$1,4 \times 10^{10}$ ans
Radium 228	${}_{88}^{228}\text{Ra}$	β^-	5,7 ans
Actinium 228	${}_{89}^{228}\text{Ac}$	β^-	6,1 h
Thorium 228	${}_{90}^{228}\text{Th}$	α	1,9 ans
Radium 224	${}_{88}^{224}\text{Ra}$	α	3,6 j
Radon 220	${}_{86}^{220}\text{Rn}$	α	55 s
Polonium 216	${}_{84}^{216}\text{Po}$	α	0,15 s
Plomb 212	${}_{82}^{212}\text{Pb}$	β^-	10,6 h
Bismuth 212	${}_{83}^{212}\text{Bi}$	β^- (64%)/ α (36%)	60 min
Thallium 208	${}_{81}^{208}\text{Tl}$	β^-	3,05 min
Plomb 208	${}_{82}^{208}\text{Pb}$	Stable	—

3.2.4.3 Le concept de branchement (Bifurcation)

Jusqu'à présent, nous avons vu des noyaux qui se désintègrent d'une seule manière (soit α , soit β). Cependant, pour certains noyaux, les lois de conservation de l'énergie permettent **deux types** de désintégrations simultanément. C'est ce qu'on appelle un **branchement** (ou *branching ratio* en anglais).

📖 Notion clé — Le libre arbitre du noyau ?

Prenez l'exemple du Bismuth 212 (${}_{83}^{212}\text{Bi}$) dans la série du Thorium. Ce noyau est instable de deux façons :

- Il a un surplus de neutrons (favorable à la β^-).
- Il est assez lourd pour vouloir éjecter une particule α .

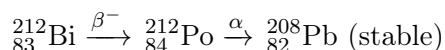
Le noyau ne choisit pas au sens conscient du terme. C'est une question de probabilités quantiques. Pour le ${}^{212}\text{Bi}$, environ 64

3.2.5 Conséquence sur la chaîne de désintégration

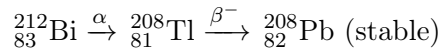
Le point crucial à comprendre est que, peu importe le chemin choisi, la lignée finit par se rejoindre un peu plus loin. C'est comme deux chemins de randonnée qui contournent une montagne pour se retrouver au même refuge.

Regardons les deux chemins pour le ${}^{212}\text{Bi}$:

1. Chemin A (64% des cas) :



2. Chemin B (36% des cas) :



⚠ Piège

Même si le chemin est différent, la destination est identique : le Plomb 208. Pourquoi ? Parce qu'une désintégration α suivie d'une β^- (ou vice-versa) retire au final 4 nucléons (dont 2 protons) et en rajoute un par transformation de neutron. Le bilan total A et Z reste dicté par la position du noyau stable le plus proche sur la carte des nucléides.

🔖 Rappel (prérequis)

Dans un exercice, si vous devez calculer l'activité totale d'un échantillon de Bismuth 212, vous utilisez la constante de désintégration totale $\lambda_{tot} = \lambda_{\alpha} + \lambda_{\beta}$. C'est cette somme qui définit la demi-vie de 60 minutes que l'on trouve dans les tables.

🔖 Rappel (prérequis)

Des graphiques similaires existent pour les séries de l'Uranium et de l'Actinium. Bien qu'elles présentent plus de branchements, elles finissent toutes par atteindre un isotope stable du plomb ($Z = 82$).

3.2.6 Remarques de synthèse sur la désintégration alpha

3.2.6.1 Pourquoi une particule alpha ?

Une question légitime que vous pourriez vous poser est la suivante : *Pourquoi le noyau choisit-il spécifiquement d'émettre une particule alpha (${}^4\text{He}$) plutôt qu'un simple proton, un neutron ou un autre petit noyau ?*

🔖 Notion clé — Pourquoi l'hélium 4 ?

La réponse réside dans l'énergie de liaison exceptionnelle de la particule α . Comme nous l'avons vu avec la SEMF, le noyau d' ${}^4\text{He}$ est une structure "doublement magique" et extrêmement stable ($BE/A \approx 7$ MeV). Cette forte cohésion interne maximise l'énergie libérée (Q) lors de la désintégration. Si un noyau tentait d'émettre un simple proton ou un noyau

de Lithium, la valeur de Q serait souvent négative ou très faible, rendant le processus énergétiquement impossible ou extrêmement improbable par effet tunnel.

3.2.6.2 Et les particules plus lourdes ?

On peut alors se demander pourquoi le noyau n'émet pas des fragments plus gros que la particule alpha pour se stabiliser encore plus vite.

- **L'émission de clusters** : Il arrive, très rarement, qu'un noyau émette des fragments comme le ^{14}C ou le ^{24}Ne . C'est ce qu'on appelle la *radioactivité de clusters*. Cependant, la probabilité que ces gros nucléons se forment à l'intérieur du noyau parent et traversent la barrière de potentiel est infime comparée à celle de la particule α .
- **La fission spontanée** : Pour les noyaux très lourds (comme le Californium ou l'Uranium), le noyau peut carrément se scinder en deux fragments de tailles comparables. Ce processus, appelé **fission spontanée**, devient significatif et même dominant face à la désintégration alpha pour les éléments les plus lourds du tableau périodique.

3.3 Désintégration bêta

La formule semi-empirique de masse montre que, pour un nombre de masse A fixé, l'énergie de liaison dépend du numéro atomique Z . La valeur de Z correspondant au maximum de $B(A, Z)$ (région de stabilité) résulte d'une compétition entre :

- le terme d'asymétrie, qui favorise $Z \simeq A/2$;
- le terme coulombien, qui pénalise les grands Z .

Les noyaux dont le rapport N/Z s'écarte de cette valeur optimale peuvent augmenter leur énergie de liaison par une désintégration bêta. La radioactivité bêta traduit ainsi la recherche du minimum d'énergie de masse pour A fixé.

3.3.1 Énergétique de la désintégration bêta

Contrairement à la désintégration α , la désintégration β implique la création de particules légères (électrons ou positrons). Pour savoir si une réaction est possible, nous devons comparer les masses atomiques initiales et finales de manière très précise, car la masse de l'électron (m_e) joue un rôle pivot.

🔑 Notion clé — Bilan de masse pour β^- et β^+

Considérons les masses atomiques $M(A, Z)$ (qui incluent les Z électrons du cortège électronique).

- **Désintégration β^-** : Le noyau (Z, A) devient $(Z + 1, A)$ avec émission d'un e^- .

$$Q_{\beta^-} = [M(Z, A) - M(Z + 1, A)]c^2$$

Note : Les masses des électrons du cortège s'annulent exactement dans le calcul.

- **Désintégration β^+** : Le noyau (Z, A) devient $(Z - 1, A)$ avec émission d'un e^+ .

$$Q_{\beta^+} = [M(Z, A) - M(Z - 1, A) - 2m_e]c^2$$

⚠ Piège

Pourquoi ce facteur $2m_e$ pour la β^+ ? Le noyau perd un proton, donc le cortège atomique doit perdre un électron pour rester neutre. Mais en plus, le noyau émet un positron. On perd donc au total la masse d'un électron « atomique » **et** la masse du positron créé. C'est pour cela que la condition énergétique est beaucoup plus stricte pour la β^+ .

3.3.2 Deux mécanismes qui réduisent Z : β^+ et la capture électronique (EC)

Comme nous l'avons vu, la désintégration β^+ exige que la différence de masse entre le père et le fils soit supérieure à $2m_e c^2 \approx 1,022$ MeV.

Si cette différence est comprise entre 0 et 1,022 MeV, la β^+ est impossible. Pourtant, le noyau peut encore se transformer via la **Capture Électronique** :

$$Q_{EC} = [M(Z, A) - M(Z - 1, A)]c^2$$

Ici, aucune particule n'est créée (l'électron est absorbé). Il suffit donc que le fils soit plus léger que le père. C'est pourquoi la capture électronique est beaucoup plus fréquente que la β^+ pour les noyaux proches de la ligne de stabilité.

3.3.3 Compétition entre émission de positon et capture électronique

Pour les noyaux riches en protons, deux processus de désintégration bêta peuvent transformer un proton en neutron :

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (\text{émission de positon, ou } \beta^+), \quad (3.16)$$

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad (\text{capture électronique, EC}). \quad (3.17)$$

La différence essentielle entre ces deux processus est leur condition énergétique. En utilisant les *masses atomiques*, les énergies de désintégration s'écrivent

$$Q_{\beta^+} = M(A, Z) - M(A, Z - 1) - 2m_e c^2, \quad (3.18)$$

$$Q_{\text{EC}} = M(A, Z) - M(A, Z - 1). \quad (3.19)$$

La désintégration par émission de positon exige donc une énergie supplémentaire de $2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV}$. Cette énergie correspond à la création du positon ainsi qu'à la différence d'électrons entre les deux atomes lorsque l'on utilise les masses atomiques.

On en déduit les règles suivantes :

- Si $Q < 0$, aucune de ces désintégrations n'est possible.
- Si $0 < Q < 1,022 \text{ MeV}$, seule la capture électronique est possible.
- Si $Q > 1,022 \text{ MeV}$, les deux processus sont énergétiquement possibles.

Lorsque les deux processus sont permis, ils *entrent en compétition*. La capture électronique est légèrement favorisée énergétiquement, mais sa probabilité dépend de la densité de probabilité des électrons atomiques au niveau du noyau (principalement les électrons de la couche K). L'émission de positon, en revanche, dispose d'un espace de phase plus grand lorsque l'énergie disponible est importante. Par conséquent :

- pour des énergies de désintégration proches du seuil $1,022 \text{ MeV}$, la capture électronique domine généralement ;
- pour des énergies de désintégration plus grandes, l'émission de positon devient souvent le processus dominant.

🔖 Notion clé — Quel électron atomique a la plus grande probabilité d'être capturé par le noyau ?

La capture électronique se produit principalement avec les électrons de la couche K ($n = 1$), car leur fonction d'onde possède la plus grande densité de probabilité au niveau du noyau.

Dans de nombreux noyaux, les deux processus se produisent simultanément avec des *rappports d'embranchement* différents.

Un exemple important est le noyau ^{18}F , utilisé en tomographie par émission de positons (PET) :



Ce noyau se désintègre principalement par émission de positon, mais une petite fraction des désintégrations se produit également par capture électronique.

3.3.4 Le mystère de l'énergie et l'invention du Neutrino

Au début des années 1920, la radioactivité β posait un problème majeur aux physiciens. Pour une désintégration α , toutes les particules sortent avec la même énergie (spectre de raies). Mais pour la β , les électrons sortent avec une **distribution continue** d'énergies, allant de 0 jusqu'à un maximum E_{max} .

Où passait l'énergie manquante ? Certains, comme Niels Bohr, étaient prêts à abandonner le principe de conservation de l'énergie au niveau microscopique !

3.3.5 Le « remède désespéré » de Wolfgang Pauli

En 1930, Wolfgang Pauli envoie une lettre célèbre à une conférence de physiciens (qu'il appelle ses « chers amis radioactifs »). Il y propose une idée qu'il qualifie lui-même de « remède désespéré » : il existe une troisième particule, neutre et très légère (voire sans masse), émise en même temps que l'électron.

Cette particule, que Fermi appellera plus tard le **neutrino** (« le petit neutre »), emporte la part d'énergie manquante.

🔑 Notion clé — La conservation rétablie

L'énergie totale de la désintégration (Q) est constante, mais elle est partagée de manière aléatoire entre deux particules :

$$Q = E_{cintique}(e) + E_{cintique}(\nu) \quad (3.21)$$

C'est ce partage à deux corps qui explique pourquoi l'électron n'a pas toujours la même énergie. Le neutrino est si fantomatique qu'il fallut attendre 1956 pour qu'il soit détecté expérimentalement !

3.3.6 La double parabole des masses et les isobares stables

Pour un nombre de masse A fixé, la formule semi-empirique de masse (SEMF) montre que la masse du noyau $M(A, Z)$ est une fonction quadratique du numéro atomique Z . Si l'on trace cette fonction, on obtient une « parabole des masses » dont le minimum représente le noyau le plus stable pour ce A donné (le fond de la vallée de stabilité).

Cependant, la topologie de cette vallée change radicalement selon la parité de A .

3.3.6.1 Le cas des A impairs

Lorsque A est impair, l'un des deux nombres (Z ou N) est forcément pair et l'autre impair. Le terme d'appariement δ est alors nul par définition. Tous les isotopes se répartissent sur une ****unique parabole****.

Dans ce cas, il n'existe qu'un seul noyau stable : le plus proche du minimum énergétique. Tous les autres noyaux « descendent » la pente vers ce minimum par une succession de désintégrations β^- (si N/Z est trop grand) ou de désintégrations β^+ et/ou de captures électroniques (si Z est trop grand).

3.3.6.2 Le cas des A pairs : la double parabole

Lorsque A est pair, deux configurations de parité sont possibles : soit Z et N sont tous deux pairs (noyaux *pair-pair*), soit ils sont tous deux impairs (noyaux *impair-impair*).

Le terme d'appariement δ intervient alors comme un décalage énergétique :

- Les noyaux **pair-pair** sont plus fortement liés ($\delta > 0$), ce qui abaisse leur masse. Ils forment une parabole inférieure.
- Les noyaux **impair-impair** sont moins liés ($\delta < 0$), ce qui augmente leur masse. Ils forment une parabole supérieure.

Cette séparation en deux courbes explique un phénomène remarquable : l'existence d'isobares stables.

Notion clé — Blocage énergétique et minima locaux

Pour les nombres de masse A pairs, l'existence du terme d'appariement (δ) sépare les isotopes en deux paraboles de masse distinctes. Cette configuration permet l'existence de plusieurs isobares stables (minima locaux), car la transformation d'un noyau pair-pair vers un autre plus stable nécessite souvent de passer par un noyau impair-impair énergétiquement défavorisé.

↳ Rappel (prérequis)

Considérons par exemple les isobares $A = 124$. Le Tellure (${}_{52}^{124}\text{Te}$) est le minimum global, mais l'Étain (${}_{50}^{124}\text{Sn}$) est également stable dans la nature. Bien que l'Étain soit plus lourd que le Tellure, il ne peut pas se désintégrer car l'étape intermédiaire, l'Antimoine (${}_{51}^{124}\text{Sb}$), est un noyau impair-impair situé sur la parabole supérieure, donc plus lourd que l'Étain. La transition est interdite par la conservation de l'énergie.

3.4 Désintégration Gamma

Contrairement aux désintégrations α et β , la désintégration gamma (γ) ne modifie pas la nature chimique du noyau (Z reste constant) ni son nombre de nucléons (A reste constant). Elle représente le mécanisme par lequel un noyau libère un surplus d'énergie pour passer d'un état excité à un état de plus basse énergie, généralement l'état fondamental.

3.4.1 Nature et origine de l'excitation

Un noyau peut se trouver dans un état excité, noté $(A, Z)^*$, à la suite d'un processus préalable. Le plus souvent, il s'agit du produit « fils » d'une désintégration α ou β qui n'a pas été formé directement dans son état fondamental.

Une autre possibilité est l'excitation du noyau par capture d'un neutron de faible énergie cinétique. Lorsqu'un neutron est capturé, l'énergie de liaison libérée apparaît généralement sous forme d'énergie d'excitation du noyau composé.

Nous étudions un exemple de capture neutronique par ${}_{92}^{235}\text{U}$ dans le TD 7.

↳ Notion clé — L'analogie atomique

Le processus est conceptuellement identique à l'émission d'un photon par un atome dont un électron est sur une couche excitée. Cependant, là où les transitions électroniques impliquent des énergies de l'ordre de l'électron-volt (eV), les transitions nucléaires impliquent des énergies de l'ordre du **MeV**. Les photons émis sont donc des rayons gamma, extrêmement pénétrants.

3.4.2 Énergétique et Recul

La réaction type est :



L'énergie du photon γ est presque exactement égale à la différence d'énergie entre l'état initial E_i et l'état final E_f du noyau.

$$E_\gamma \approx E_i - E_f \quad (3.23)$$

Un détail Pour être rigoureux, la conservation de la quantité de mouvement impose que le noyau recule légèrement lors de l'émission du photon. Une petite fraction de l'énergie de transition est donc consommée sous forme d'énergie cinétique de recul du noyau. Toutefois, la masse du noyau étant immense par rapport à l'énergie du photon, cette perte est généralement négligeable ($< 10^{-5}$ en fraction relative) devant l'énergie du rayon gamma.

3.4.3 Conversion Interne : Une alternative à l'émission γ

Il existe un processus concurrent de l'émission gamma appelé la **conversion interne**. Au lieu d'émettre un photon, le noyau transfère directement son énergie d'excitation à l'un des électrons de ses couches internes (généralement la couche K).

- L'électron est alors éjecté du cortège atomique avec une énergie cinétique : $E_e = (E_i - E_f) - E_{liaison}$.
- Ce processus ne doit pas être confondu avec la désintégration β . Ici, l'électron provient du cortège électronique existant, il n'est pas créé par la transformation d'un nucléon.

3.4.4 Isométrie nucléaire

En général, les transitions gamma sont extrêmement rapides (durée de vie de l'ordre de 10^{-12} s). Cependant, dans certains cas, les règles de sélection (liées au changement de spin et de parité entre les états) rendent la transition très improbable.

🔖 Notion clé — États métastables (Isomères)

Lorsque la désexcitation est fortement "interdite" par les lois quantiques, le niveau excité peut avoir une durée de vie très longue (de quelques milli-

secondes à plusieurs années). On appelle cet état un **isomère nucléaire**, noté avec un "m" : ^{99m}Tc .

 Notion clé — Application médicale

Le Technétium 99m (^{99m}Tc) est l'isotope le plus utilisé en médecine nucléaire (scintigraphie). Sa demi-vie de 6 heures est assez longue pour permettre l'examen médical, et il se désexcite en émettant uniquement un rayonnement γ de 140 keV, ce qui est idéal pour l'imagerie sans délivrer une dose de particules (α ou β) trop dommageable au patient.

 Piège

Ne confondez pas les **isotopes** (même Z , A différent) et les **isomères** (même Z , même A , mais état énergétique différent). Un isomère est simplement un noyau "bloqué" dans une configuration excitée.

Chapitre 4

Réactions nucléaires

Sur construction ci-après.

4.1 Introduction

L'analyse des réactions nucléaires repose sur un ensemble de lois de conservation fondamentales. Ces lois permettent :

- de déterminer si une réaction est possible,
- de contraindre les produits de réaction,
- d'extraire des informations sur les masses nucléaires.

4.2 Réaction nucléaire générale

On considère une réaction de type :



où A est initialement au repos dans le laboratoire.

4.3 Lois de conservation dans les réactions nucléaires

Lorsqu'on analyse une réaction nucléaire, plusieurs lois de conservation doivent être respectées. Ces lois permettent de déterminer si une réaction est possible et influencent également la probabilité (ou la vitesse) à laquelle la réaction se produit.

Les principales lois de conservation pertinentes pour les réactions nucléaires sont :

1. énergie totale relativiste (y compris l'énergie de masse au repos)
2. quantité de mouvement linéaire (y compris le facteur de Lorentz)
3. moment cinétique total (quantité de mouvement angulaire)
4. charge électrique
5. parité
6. nombre baryonique (nombre de nucléons)
7. nombre leptonique

Dans nos discussions jusqu'à présent, nous avons déjà utilisé certaines de ces lois de façon extensive. La conservation de l'énergie a été utilisée tout au long du cours pour calculer les valeurs de Q et l'énergie libérée dans les réactions nucléaires. La conservation de la quantité de mouvement et de la charge électrique a également été mentionnée brièvement lorsque nous avons discuté des produits de réaction.

D'autres lois de conservation n'ont pas encore été discutées en détail, mais elles jouent un rôle important dans les *taux de réaction*. En particulier, la conservation du moment cinétique et de la parité peut rendre certaines transitions plus ou moins probables.

Parité

La parité décrit le comportement d'un système physique lorsque l'on inverse toutes les coordonnées spatiales. Une transformation de parité correspond à

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z).$$

Une interaction conserve la parité si les équations physiques qui la décrivent restent inchangées sous cette transformation.

L'interaction électromagnétique conserve la parité. On peut le voir en examinant la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Sous une transformation de parité, la vitesse \vec{v} et le champ électrique \vec{E} changent de signe parce qu'il s'agit de vecteurs polaires :

$$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}, \quad \vec{E} \rightarrow -\vec{E}.$$

Le champ magnétique \vec{B} est un vecteur axial (pseudo-vecteur) et ne change pas de signe sous inversion spatiale :

$$\vec{B} \rightarrow \vec{B}.$$

On obtient alors

$$\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow (-\vec{v}) \times \vec{B} = -(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Ainsi les deux termes de la force changent de signe et

$$\vec{F} \rightarrow -\vec{F}.$$

C'est exactement la transformation attendue pour une force sous inversion spatiale. La forme de l'équation reste donc inchangée, ce qui signifie que l'interaction électromagnétique conserve la parité.

Nombre baryonique (nombre de nucléons)

Le nombre baryonique compte le nombre de baryons dans une réaction. Les protons et les neutrons possèdent chacun un nombre baryonique égal à +1.

Dans les réactions nucléaires que nous avons étudiées jusqu'à présent, le nombre total de nucléons avant et après la réaction est resté le même. La conservation du nombre baryonique était donc implicite dans nos discussions.

Nombre leptonique

Le nombre leptonique est associé aux leptons, comme les électrons et les neutrinos. Chaque lepton possède un nombre leptonique +1, tandis que l'antiparticule correspondante possède un nombre leptonique -1.

Par exemple :

particule	nombre leptonique
e^-	+1
ν_e	+1
e^+	-1
$\bar{\nu}_e$	-1

La conservation du nombre leptonique apparaît clairement dans la désintégration β^- :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Avant la désintégration, le nombre leptonique total est

$$L_{\text{initial}} = 0$$

car le neutron n'est pas un lepton.

Après la désintégration, l'électron contribue +1 et l'antineutrino contribue -1 :

$$L_{\text{final}} = (+1) + (-1) = 0.$$

Le nombre leptonique total est donc conservé.

□ Rappel (prérequis)

En relativité restreinte, les expressions de l'énergie et de la quantité de mouvement diffèrent de celles de la mécanique classique.

Le facteur de Lorentz est défini par

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

La quantité de mouvement relativiste d'une particule de masse m et de vitesse \vec{v} est

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}.$$

Lorsque la vitesse devient comparable à la vitesse de la lumière c , le facteur γ devient supérieur à 1 et la quantité de mouvement augmente plus rapidement que dans la mécanique classique.

L'énergie totale relativiste de la particule est donnée par

$$E = \gamma m c^2.$$

On voit donc que l'énergie totale est simplement l'énergie de masse au repos $m c^2$ multipliée par le même facteur de Lorentz.

Dans les formulations plus avancées de la relativité, on regroupe l'énergie et la quantité de mouvement dans un seul objet appelé le *quadri-moment* :

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right).$$

La quantité $\frac{E}{c}$ joue alors le rôle d'une composante temporelle, tandis que \vec{p} correspond aux trois composantes spatiales du moment. Cette écriture met en évidence l'unification entre énergie et quantité de mouvement dans la relativité.

Voir TD7

🔖 Notion clé — Pourquoi l'Uranium 235 est-il le combustible des réacteurs ?

C'est ici que le terme d'appariement δ est crucial.

- En passant du ^{235}U (noyau impair) au ^{236}U (noyau pair-pair), on gagne un "bonus" d'énergie de liaison grâce à l'appariement des neutrons. C'est ce bonus qui fait monter E^* au-dessus du seuil de 5,7 MeV.
- Pour l' ^{238}U , la capture d'un neutron forme du ^{239}U (noyau pair-impair). Il n'y a pas de bonus d'appariement, et l'énergie libérée n'est que de $\approx 4,8$ MeV. Comme $4,8 < 5,7$, l' ^{238}U ne peut pas fissionner avec des neutrons lents.

L'Uranium 235 est donc qualifié de **fissile**, car il peut entretenir une réaction en chaîne avec des neutrons ralentis (modérés), ce qui est la base du fonctionnement des réacteurs nucléaires civils.

4.4 Définition de la valeur Q

Au cours d'une réaction nucléaire, l'énergie cinétique totale peut varier en raison d'une conversion entre énergie de masse et énergie cinétique.

On définit la valeur Q comme la variation de l'énergie cinétique totale :

$$Q = \sum K_{\text{final}} - \sum K_{\text{initial}}. \quad (4.2)$$

Considérons une réaction induite par la collision d'une particule a avec un noyau cible A initialement au repos dans le référentiel du laboratoire, produisant une particule émise b et un noyau résiduel B :



Dans ce cas, la définition de Q s'écrit :

$$Q = K_B + K_b - K_a. \quad (4.4)$$

Remarque Pourquoi n'apparaît-il pas de terme K_A dans cette expression ?

Parce que le noyau cible A est initialement au repos dans le référentiel du laboratoire, donc :

$$K_A = 0. \quad (4.5)$$

Interprétation :

- $Q > 0$: réaction exoénergétique
- $Q < 0$: réaction endoénergétique

En utilisant $E = mc^2$, on obtient :

$$Q = (m_a + m_A - m_b - m_B)c^2 \quad (4.6)$$

4.5 Lois de conservation

4.5.1 Conservations toujours valables

Dans toute réaction nucléaire :

- Nombre baryonique (nombre de nucléons)
- Charge électrique
- Énergie totale
- Quantité de mouvement
- Moment cinétique total

4.5.2 Autres lois

- **Nombre leptonique** : conservé dans les interactions faibles.
- **Parité** :
 - conservée dans les interactions forte et électromagnétique,
 - **violée dans l'interaction faible** (désintégration β).

Dans les réactions nucléaires induites (interaction forte), la parité est conservée.

4.6 Définition de la parité

La parité correspond à l'effet de l'inversion spatiale :

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r} \quad (4.7)$$

Une fonction d'onde transforme comme :

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow \psi(-\vec{r}) = \pm\psi(\vec{r}) \quad (4.8)$$

- + : parité paire,
- - : parité impaire.

Pour un état orbital de moment angulaire ℓ :

$$\pi = (-1)^\ell \quad (4.9)$$

4.7 Exemple : première réaction nucléaire artificielle (Rutherford)

Rutherford (1919) observe la réaction :



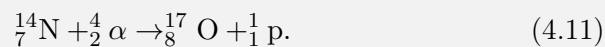
4.7.1 Analyse

- Conservation de A : $14 + 4 = 17 + 1$
- Conservation de Z : $7 + 2 = 8 + 1$

Cette réaction est la première transmutation artificielle d'un élément.

En 1919, Ernest Rutherford réalise la première réaction nucléaire artificielle en bombardant de l'azote gazeux avec des particules α issues d'une source radioactive (typiquement du radium ou du radon et leurs descendants). Ces particules α possèdent des énergies de l'ordre de 5 à 8 MeV.

La réaction observée est :



Le dispositif expérimental consistait en une chambre contenant de l'azote gazeux ; les protons émis étaient détectés par scintillations sur un écran de sulfure de zinc.

Malgré la répulsion coulombienne, l'énergie des particules α est suffisante pour permettre l'approche à des distances nucléaires, où l'interaction forte rend possible la réaction.

4.7.1.1 Mesure expérimentale

On mesure :

- énergie incidente K_α ,

- énergie du proton K_b ,
 - angle d'émission θ .
- L'objectif est d'en déduire Q .

4.7.1.2 Dérivation de l'équation (15-16) de Eisberg et Resnick

On part des deux lois :

Conservation de l'énergie

$$K_a + m_a c^2 + m_A c^2 = K_b + K_B + m_b c^2 + m_B c^2 \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow Q = K_B + K_b - K_a \quad (4.13)$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\vec{p}_a = \vec{p}_b + \vec{p}_B \quad (4.14)$$

Dans les expériences de Rutherford, le recul du noyau résiduel B (l'oxygène) n'était pas observé. Il ne savait pas ni \vec{p}_B ni K_B . Donc, il est intéressant d'éliminer K_B dans l'équation (4.13) pour Q . On écrit :

$$\vec{p}_B = \vec{p}_a - \vec{p}_b. \quad (4.15)$$

Puis, on élève au carré :

$$\begin{aligned} \vec{p}_B \cdot \vec{p}_B &= (\vec{p}_a - \vec{p}_b) \cdot (\vec{p}_a - \vec{p}_b) \\ &= (\vec{p}_a - \vec{p}_b) \cdot (\vec{p}_a - \vec{p}_b) \\ p_B^2 &= p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta \end{aligned} \quad (4.16)$$

où θ est l'angle entre \vec{p}_a et \vec{p}_b . Cet angle est déterminé par la position du détecteur et la cible. Donc :

$$p_B^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta \quad (4.17)$$

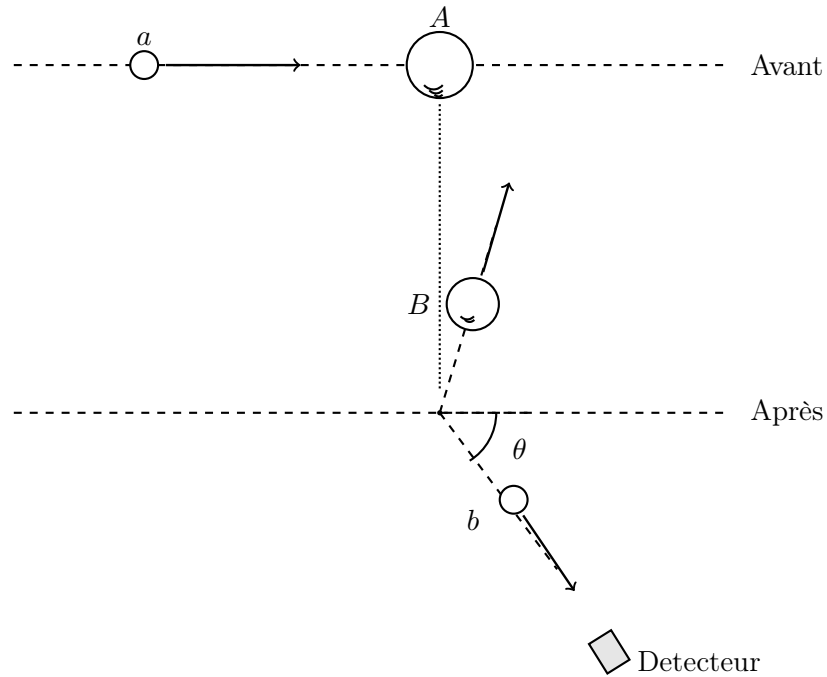


FIGURE 4.1 – Désin d'une réaction nucléaire de type de l'expérience de Rutherford. La position du détecteur fixe l'angle θ de recul de la particule b .

Approximation non relativiste

Lorsque $K \ll mc^2$ les effets relativistes sont faibles et l'on peut approximer la quantité de mouvement avec la relation non relativiste :

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mK} \quad (4.18)$$

Donc :

$$K_B = \frac{p_B^2}{2m_B} \quad (4.19)$$

Substitution :

$$K_B = \frac{1}{2m_B} (p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta) \quad (4.20)$$

Expression en énergies cinétiques

$$p_a^2 = 2m_a K_a, \quad p_b^2 = 2m_b K_b \quad (4.21)$$

$$K_B = \frac{1}{2m_B} \left(2m_a K_a + 2m_b K_b - 2\sqrt{2m_a K_a} \sqrt{2m_b K_b} \cos \theta \right) \quad (4.22)$$

$$K_B = \frac{m_a}{m_B} K_a + \frac{m_b}{m_B} K_b - \frac{2}{m_B} \sqrt{m_a m_b K_a K_b} \cos \theta \quad (4.23)$$

Expression finale de Q

$$Q = K_b + K_B - K_a \quad (4.24)$$

En substituant K_B :

$$Q = K_b \left(1 + \frac{m_b}{m_B} \right) - K_a \left(1 - \frac{m_a}{m_B} \right) - \frac{2}{m_B} \sqrt{m_a m_b K_a K_b} \cos \theta \quad (4.25)$$

C'est l'équation (15-16) de Eisberg & Resnick, obtenue ici explicitement.

4.8 Cas particulier : $\theta = 90^\circ$

$$\cos \theta = 0 \quad (4.26)$$

Donc :

$$Q = K_b \left(1 + \frac{m_b}{m_B} \right) - K_a \left(1 - \frac{m_a}{m_B} \right) \quad (4.27)$$

Ce cas est utilisé expérimentalement pour simplifier l'analyse.

4.9 Conclusion

- Les lois de conservation contraignent fortement les réactions nucléaires.
- La valeur Q relie directement cinématique et masses nucléaires.
- L'exemple de Rutherford illustre comment mesurer des masses nucléaires à partir de données cinématiques.
- La dérivation de (15-16) montre le rôle central de la conservation de la quantité de mouvement.

Deuxième partie

Applications médicales

Chapitre 5

La physique médicale

5.1 Le physicien médicale

4 main branches of medical physics :

1. diagnostic radiology physics (basically about imaging)
2. nuclear medicine (using radioactive nucleotides for medicine for imaging, e.g. PET)
3. radiation oncology (treating cancer with ionizing radiation)
4. health physics : radiation hazards, radiation protection (and dosimetry?)

* Monte Carlo techniques are used in determining the dose distributions of penetrating ionizing radiation.

* IR is used in all branches of medical physics.

* Medical physics is growing field, with more demand for medical physicists than in other specialities.

5.2 Comment devenir physicien médicale

5.2.1 Educational requirements.

Need a MSc in medical physics to work in a hospital.

Need a PhD in medical physics to work to lead research in medical physics.

To achieve international recognition for its graduates, a medical physics educational program should hold accreditation by an international accreditation body that attests to the program's meeting rigorous academic and clinical

standards in medical physics. Currently, there is only one such international body, the Commission on Accreditation of Medical Physics Educational Programs (CAMPEP) – www.campep.org/

The International Organization for Medical Physics (IOMP) is the largest medical physics organization representing 16,500 medical physicists worldwide and 80 adhering national member organizations (www.iomp.org).

European Federation of Organisations for Medical Physics (EFOMP)

Société Française de Physique Médicale <https://www.sfpm.fr/>

Career in Medical Physics

En France

5.2.2 Comment devenir physicien médicale en France

<https://www.sfpm.fr/devenir-physicien-medical-en-france/>

Quelques Programmes d'études en France

<https://spm.univ-rennes.fr/fr/parcours-physique-medicale>

<https://www.universite-paris-saclay.fr/formation/master/physique-fondamentale-et-applications-m2-radiophysique-medicale>

5.2.3 Comment devenir physicien médicale à l'internationale :

Voici une longue liste des master accrédités au niveau international : <https://www.campep.org/campeplstgrad.asp>

Bibliographie

Eisberg, Robert, and Resnick, Robert. 1985. *Quantum Physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*. 2nd edn. New York : John Wiley and Sons. 713 + XIII pp.